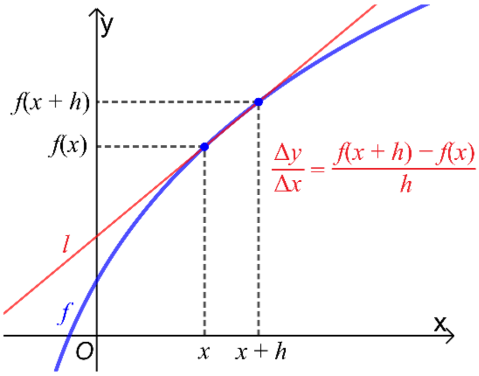
Differentiëren van functies

Inleiding: de afgeleide functie

Het is nuttig om informatie te hebben over de **helling** van de grafiek van een functie. In Figuur 1 is de grafiek van een (niet-lineaire) functie *f* getekend. Je ziet waarschijnlijk dat de helling niet overal hetzelfde is.



Figuur 1

De helling in een punt $(x, f(x))$ is te benaderen door een nabij liggend punt $(x + h, f(x + h))$, met $h > 0$, te nemen en het **differentiequotiënt** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (zie Figuur 1) over het interval $[x, x + h]$ te berekenen. Dit is de richtingscoëfficiënt (rc) van de lijn *l* door de twee punten. Door *h* klein te maken (0 te laten naderen), wordt de werkelijke helling van de grafiek in $(x, f(x))$ steeds beter benaderd en wordt *l* de **raaklijn** aan de grafiek van *f* in $(x, f(x))$.

Definitie van de **afgeleide functie**:[1] $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $\quad$ $f'(x)$ ook te noteren als $[f(x)]'$ of $\frac{d}{dx}f(x)$

De afgeleide functie f' (spreek uit: f accent) wordt ook wel de **hellingfunctie** van *f* genoemd. Met f' kan voor elke *x* de helling van de grafiek van *f* worden berekend. Het bepalen van de afgeleide functie heet **differentiëren**. Dit document biedt een overzicht van differentieerregels. Toepassingen van de afgeleide functie worden ook besproken.

Regels voor het differentiëren van functies

De basis: differentiëren van standaardfuncties

Door de definitie van de afgeleide functie uit de inleiding toe te passen op standaardfuncties, zijn algemene differentieerregels vastgesteld. Zie Tabel 1 hieronder.

Tabel 1. Regels voor het differentiëren van standaardfuncties

type functie *f*	$f(x) = \ldots$	$f'(x) = \ldots$	voorbeelden
constante	c	0	$f(x) = 5$ geeft $f'(x) = 0$
machts-	x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^3$ geeft $f'(x) = 3x^2$
exponentiële[2]	$\mathbf{e^x}$ g^x	$\mathbf{e^x}$ $g^x \cdot \ln(g)$	 $f(x) = 2^x$ geeft $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$
logaritmische[3]	$\mathbf{\ln(x)}$ ${}^g\log(x)$ $[= \frac{\ln(x)}{\ln(g)}]$	$\mathbf{\frac{1}{x}}$ $\frac{1}{x \cdot \ln(g)}$	$f(x) = {}^3\log(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(3)}$
goniometrische	$\sin(x)$ $\cos(x)$	$\cos(x)$ $-\sin(x)$	

[1] Dit is een limiet (lim): je kunt willekeurig dicht bij de werkelijke helling komen door *h* klein genoeg te nemen. $\frac{dy}{dx}$ is een **differentiaalquotiënt**; de d-notatie impliceert dat *h* klein is en 0 nadert (*h* mag niet exact 0 worden).

[2] Voor exponentiële functies $f(x) = g^x$ kun je via de definitie van de afgeleide bepalen dat $f'(x) = b \cdot f(x)$ met $b \neq 0$. Er bestaat een grondtal zodanig dat $b = 1$, dus $[g^x]' = g^x$. Dat gebeurt als $g = e$, het getal van Euler, een irrationaal getal met een waarde van ongeveer 2,718. Formeel is e als volgt gedefinieerd: $e = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$

[3] De natuurlijke logaritme is de logaritme met e als grondtal, dus $\ln(x) = {}^e\log(x)$ en $\ln(g) = {}^e\log(g)$.

Factorregel

Als een functie wordt vermenigvuldigd met een constante factor a ($a \in \mathbb{R}$), dan wordt de afgeleide functie vermenigvuldigd met dezelfde factor.

- $f(x) = a \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = a \cdot g'(x)$ ***factorregel***

Voorbeelden:

- $f(x) = -4x^3$ geeft $f'(x) = -4 \cdot 3x^2 = -12x^2$
- $f(x) = \frac{3}{5} \cdot \ln(x)$ geeft $f'(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{5x}$

Somregel

Als een functie een som is van meerdere functies, mag je term voor term differentiëren.

- $f(x) = g(x) + h(x)$ geeft $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ ***somregel***

Voorbeelden:

- $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x^{-1} + 3$ geeft $f'(x) = 12x^2 + 6x - -x^{-2}$ $(+\ 0) = 12x^2 + 6x + x^{-2}$
- $f(x) = x^4 - 3 \cdot 2^x + {}^2\log(x) + \sin(x)$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) + \frac{1}{x \cdot \ln(2)} + \cos(x)$

Kettingregel

Als je te maken hebt met een **samengestelde functie** (ook wel **geschakelde functie** of **kettingfunctie** genoemd), dan moet je de afgeleiden van de schakels met elkaar vermenigvuldigen.

- $f(x) = v(u(x))$ geeft $f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$ ***kettingregel***

In samengestelde functies werken twee of meer functies na elkaar. Laten we $f(x) = v(u(x))$ bekijken, waar twee functies u en v geschakeld zijn.[4] De functie u neemt x als input — de functiewaarde $u(x)$ dient vervolgens als input voor de tweede functie v, met $v(u(x))$ als resultaat. Dit klinkt moeilijk, maar misschien heb je al met samengestelde functies gewerkt. Enkele voorbeelden zijn: $f(x) = (3x + 1)^5$, $g(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$, $h(x) = \sin(2x)$ en $j(x) = e^{-x}$. Om bijvoorbeeld de functiewaarde van f uit te rekenen bij een gegeven x, reken je eerst $3x + 1$ uit en daarna verhef je de uitkomst tot de macht 5. De functie $f(x) = (3x + 1)^5$ is dus een samengestelde functie met de schakels[5] $v(u) = u^5$ en $u(x) = 3x + 1$. Nu is differentiëren via de kettingregel mogelijk. Eerst differentieer je de schakels: $v'(u) = 5u^4 = 5(3x + 1)^4$ en $u'(x) = 3$. Dit geeft $f'(x) = 5(3x + 1)^4 \cdot 3 = 15(3x + 1)^4$. De andere voorbeelden:

- $g(x) = \frac{3}{x^2 + 4} = 3(x^2 + 4)^{-1}$ bestaat uit de schakels $v(u) = 3u^{-1}$ en $u(x) = x^2 + 4$
  $v'(u) = -3u^{-2} = \frac{-3}{u^2} = \frac{-3}{(x^2 + 4)^2}$ en $u'(x) = 2x$, dus $g'(x) = \frac{-3}{(x^2 + 4)^2} \cdot 2x = -\frac{6x}{(x^2 + 4)^2}$
- $h(x) = \sin(2x)$ bestaat uit de schakels $v(u) = \sin(u)$ en $u(x) = 2x$
  $v'(u) = \cos(u) = \cos(2x)$ en $u'(x) = 2$, dus $h'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$
- $j(x) = e^{-x}$ bestaat uit de schakels $v(u) = e^u$ en $u(x) = -x$
  $v'(u) = e^u = e^{-x}$ en $u'(x) = -1$, dus $j'(x) = e^{-x} \cdot -1 = -e^{-x}$

---

[4] Een notatie voor $f(x) = v(u(x))$ die de schakeling van functies visualiseert is $f(x) = (v \circ u)(x)$. Je spreekt $v \circ u$ uit als ‘v na u’ of als ‘u, dan v’. Er kunnen ook meer dan twee functies geschakeld worden, bijvoorbeeld in $g(x) = w(v(u(x)))$, dat ook te schrijven is als $g(x) = (w \circ v \circ u)(x)$.

[5] We zouden eigenlijk $v(u(x)) = (u(x))^5$ moeten schrijven, maar de vele haakjes maken dat erg onoverzichtelijk. Om dezelfde reden schrijven we $v'(u) = 5u^4$ in plaats van het meer correcte $v'(u(x)) = 5(u(x))^4$.

Productregel

Als een functie een **productfunctie** is, dan differentieer je volgens de productregel. Als $g(x)$ en/of $h(x)$ een samengestelde functie is, heb je naast de productregel ook de kettingregel nodig!

❖ $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ geeft $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ ***productregel***

Voorbeelden:

- $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ geeft $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$
- $f(x) = x^2 \cdot \sin(2x)$ geeft $f'(x) = 2x \cdot \sin(2x) + x^2 \cdot 2\cos(2x) = 2x \cdot \sin(2x) + 2x^2 \cdot \cos(2x)$ [ook kettingregel]
- $f(x) = x \cdot e^x$ geeft $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + x \cdot e^x$
- $f(x) = x \cdot \ln(x)$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

Let op: soms is een functie gegeven in de vorm van een productfunctie, terwijl de functie ook eenvoudiger geschreven kan worden. Voorbeeld: $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{5}{2}}$. Hoewel je zeker de productregel kunt toepassen op $x^2 \cdot \sqrt{x}$, kun je $x^{\frac{5}{2}}$ in één stap differentiëren: $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$.

Quotiëntregel

Als een functie een **quotiëntfunctie** is, dan differentieer je volgens de quotiëntregel. Als $t(x)$ en/of $n(x)$ een samengestelde functie is, heb je naast de quotiëntregel ook de kettingregel nodig!

❖ $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$ $\left(= \frac{\text{nat - tan}}{n^2}\right)$ ***quotiëntregel***

Het ezelsbruggetje 'nat min tan, gedeeld door n kwadraat' dat hierboven ook staat, kun je gebruiken om de quotiëntregel te onthouden (*at = afgeleide van de teller*; *an = afgeleide van de noemer*).

Voorbeelden:

- $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ geeft $f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$
- $f(x) = \frac{x}{\sin(2x)}$ geeft $f'(x) = \frac{\sin(2x) \cdot 1 - x \cdot 2\cos(2x)}{(\sin(2x))^2} = \frac{\sin(2x) - 2x\cos(2x)}{(\sin(2x))^2}$ [ook kettingregel]

Let op: niet bij elke breuk heb je de quotiëntregel nodig. De functie $f(x) = \frac{x^3}{x}$ kan vereenvoudigd worden tot $f(x) = x^2$ (mits $x \neq 0$), dat zeer eenvoudig te differentiëren is. Ook als de teller of noemer een constante is, is het gebruik van de quotiëntregel niet nodig. Zo is $f(x) = \frac{x^2 + 4}{3}$ te schrijven als $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}$. Een functie als $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ is te schrijven als $f(x) = (\sin(x))^{-1}$ — deze samengestelde functie kan met behulp van de kettingregel gedifferentieerd worden.

Waar moet je op letten bij het differentiëren van functies?

Voordat je begint met differentiëren, is het goed om enkele dingen op een rijtje te hebben:

- Ga na of de functie vereenvoudigd kan worden opgeschreven
- Ga na of je te maken hebt met productfuncties, quotiëntfuncties en/of samengestelde functies; zo ja, schrijf de betreffende regel(s) voor het differentiëren op
- Ga na welke functietypes (Tabel 1) je bent tegengekomen en schrijf de basisregel(s) voor het differentiëren op

Toepassingen van de afgeleide functie

Raaklijnen aan grafieken

De afgeleide functie f' geeft voor elke waarde van x de helling van de grafiek van f. Je kunt f' daarom gebruiken om de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek van f op te stellen. Zie ook Figuur 1: als h klein is en 0 nadert, wordt l de raaklijn aan de grafiek van f in $(x, f(x))$.

Voorbeeldopgave

(a) Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^3 - 2x + 10$. Een punt A met $x_A = 2$ ligt op de grafiek van f. Stel de formule op van de raaklijn k aan de grafiek van f in A.

Uitwerking: om y_A te berekenen, berekenen we $f(x_A)$. De formule van de raaklijn k is van de vorm $y = ax + b$, waarbij geldt dat $a = \text{rc}_k = f'(x_A)$. Om f te differentiëren is de kettingregel nodig.

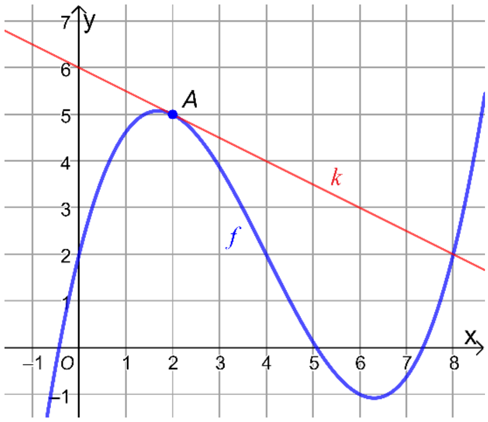
$y_A = f(x_A) = (\frac{1}{2}\cdot 2 - 2)^3 - 2\cdot 2 + 10 = 5$, dus $A(2, 5)$.

$f'(x) = 3(\frac{1}{2}x - 2)^2\cdot\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 2)^2 - 2$

$a = \text{rc}_k = f'(2) = 1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cdot 2\ - 2)^2 - 2 = -\frac{1}{2}$

Dus k: $y = -\frac{1}{2}x + b$ en gaat door $A(2, 5)$. Invullen geeft $5 = -\frac{1}{2}\cdot 2 + b = -1 + b$, waaruit volgt dat $b = 6$.

Antwoord: k: $y = -\frac{1}{2}x + 6$ (zie ook Figuur 2).

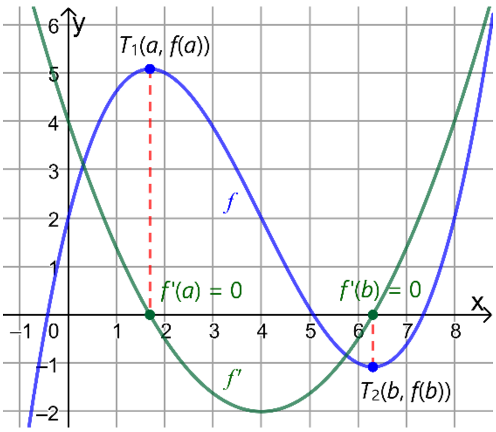


Figuur 2

Overigens zie je rechts dat de raaklijn de grafiek van f ook ergens snijdt (bij (8, 2)). Dat is geen probleem. Bij A raakt k de grafiek van f, want $\text{rc}_k = f'(x_A)$.

Stijgen en dalen; toppen; extreme waarden

De afgeleide funtie f' geeft informatie over het **stijgen** of **dalen** van (de grafiek van) functie f. Als op een interval geldt dat $f'(x) > 0$, dan is f stijgend op dat interval. Als op een interval geldt dat $f'(x) < 0$, dan is f dalend op dat interval. De grafiek van f bevat een **top** als er een overgang is van stijgen naar dalen of van dalen naar stijgen. In Figuur 3 zijn de grafieken van f en f' van de voorbeeldopgave hierboven weergegeven. De toppen van grafiek van f zijn voor het gemak $T_1(a, f(a))$ en $T_2(b, f(b))$ genoemd — in de volgende voorbeeldopgave worden hun exacte coördinaten berekend.



Figuur 3

Je ziet dat bij $x = a$ en bij $x = b$ geldt dat $f'(x) = 0$ en dat $f'(x)$ van teken verandert (van positief naar negatief of andersom: de grafiek van f' gaat door de x-as). Je kunt dus aan de hand van de grafiek van f' bepalen wat de x-coördinaten van de toppen van de grafiek van f zijn.

Bij het overgaan van stijgen naar dalen is de y-coördinaat van de top een (lokaal) **maximum** van f. Bij het overgaan van dalen naar stijgen is de y-coördinaat van de top een (lokaal) **minimum** van f. Maxima en minima van f heten ook wel **extreme waarden** van f. Het berekenen van de extreme waarden van een functie heet ook wel het **optimaliseren** van een functie.

Samenvattend: een punt $T(x_T, f(x_T))$ is een top van de grafiek van f als geldt:

- ❖ $f'(x_T) = 0$ én $f'(x)$ verandert van teken bij $x = x_T$

Als je op zoek gaat naar toppen van de grafiek van f en/of naar extreme waarden van f, los je dus de vergelijking $f'(x) = 0$ op. Aan de hand van een getekende grafiek van f of een **tekenschema** van f' (zie de voorbeeldopgave hieronder) kun je bepalen of je met een top te maken hebt en of de bijbehorende y-coördinaat van de top een maximum of een minimum van f is.

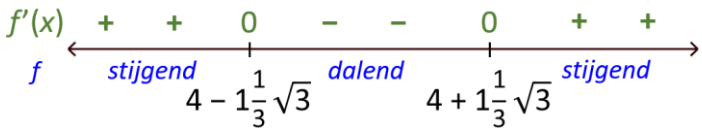
Voorbeeldopgave

(b) Gegeven is de functie f van opgave (a). Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f. [Alternatieve vraag: bereken de extreme waarden van f].

Uitwerking: in Figuur 3 zijn twee toppen te zien, bij $x \approx 1{,}7$ en $x \approx 6{,}3$. De uitwerking moet exact en dus algebraïsch, dus we differentiëren f, lossen de vergelijking $f'(x) = 0$ op en controleren ook met behulp van een tekenschema of we met toppen te maken hebben.

In opgave (a) is f al gedifferentieerd: $f'(x) = \frac{3}{2}(\frac{1}{2}x - 2)^2 - 2$. De vergelijking $f'(x) = 0$ geeft:

$$\frac{3}{2}(\tfrac{1}{2}x - 2)^2 - 2 = 0$$
$$\frac{3}{2}(\tfrac{1}{2}x - 2)^2 = 2$$
$$(\tfrac{1}{2}x - 2)^2 = \frac{4}{3}$$
$$\tfrac{1}{2}x - 2 = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \vee \tfrac{1}{2}x - 2 = -\tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$
$$\tfrac{1}{2}x = 2 + \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \vee \tfrac{1}{2}x = 2 - \tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$
$$x = 4 + 1\tfrac{1}{3}\sqrt{3} \vee x = 4 - 1\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$



Figuur 4

Omdat $f'(x) = 0$ twee oplossingen heeft, heeft de grafiek van f potentieel twee toppen. In Figuur 3 was al te zien dat de grafiek van f inderdaad twee toppen heeft, maar dit kunnen we ook zonder grafiek van f beredeneren aan de hand van het tekenschema van f' (Figuur 4). In dit tekenschema is de zien waar de afgeleide positief, negatief of 0 is. Boven de twee gevonden oplossingen komt 0 te staan. Het domein van f' (en f) is $\mathbb{R}$ en wordt door de twee oplossingen opgedeeld in drie intervallen waar $f'(x)$ niet 0 is. Voor elk van deze intervallen vul je een x-waarde uit dat interval in in f' om het teken (+ of −) van $f'(x)$ in dat interval te bepalen. Uit het interval $\langle \leftarrow, 4 - 1\frac{1}{3}\sqrt{3} \rangle$ zou je bijvoorbeeld $x = 1$ kunnen nemen — omdat $f'(1) = 1\frac{3}{8} > 0$, zet je een + boven het betreffende interval.

Het tekenschema laat zien dat er tekenverandering van $f'(x)$ is bij beide oplossingen, waaruit kan worden geconcludeerd dat de grafiek van f toppen heeft bij $x = 4 - 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$ en bij $x = 4 + 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

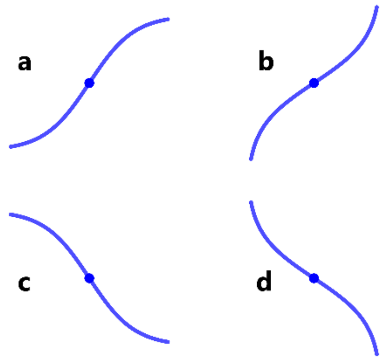
Door de oplossingen in te vullen in f, vind je dat $f(4 - 1\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 2 + 1\frac{7}{9}\sqrt{3}$ en $f(4 + 1\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 2 - 1\frac{7}{9}\sqrt{3}$. Het tekenschema laat zien dat $f(4 - 1\frac{1}{3}\sqrt{3})$ een maximum is en $f(4 + 1\frac{1}{3}\sqrt{3})$ een minimum.

Antwoord: Toppen: $(4 - 1\frac{1}{3}\sqrt{3}, 2 + 1\frac{7}{9}\sqrt{3})$ en $(4 + 1\frac{1}{3}\sqrt{3}, 2 - 1\frac{7}{9}\sqrt{3})$. [Als wordt gevraagd naar de extreme waarden van f: maximum $f(4 - 1\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 2 + 1\frac{7}{9}\sqrt{3}$ en minimum $f(4 + 1\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 2 - 1\frac{7}{9}\sqrt{3}$.]

Buigpunten: de tweede afgeleide

Een grafiek bevat een buigpunt als er een punt is waar de grafiek overgaat van:

- **a.** toenemend stijgend naar afnemend stijgend
- **b.** afnemend stijgend naar toenemend stijgend
- **c.** toenemend dalend naar afnemend dalend
- **d.** afnemend dalend naar toenemend dalend



Figuur 5

Deze situaties zijn rechts in Figuur 5 geïllustreerd. Je zou ook kunnen zeggen dat in een buigpunt de grafiek overgaat van hol naar bol (Figuur 5a,d) of van bol naar hol (Figuur 5b,c). De helling van de grafiek van *f* is maximaal of minimaal in het buigpunt. We zoeken dus naar de *x*-coördinaat van de top van de grafiek van *f'* en hiervoor hebben we de afgeleide van *f'* nodig.

De afgeleide van *f'* wordt genoteerd als *f''* (spreek uit: f dubbel accent) en heet de **tweede afgeleide van *f***. Een punt $B(x_B, f(x_B))$ is een buigpunt van de grafiek van *f* als geldt:[6]

- ❖ $f''(x_B) = 0$ én $f''(x)$ verandert van teken bij $x = x_B$

Voorbeeldopgave

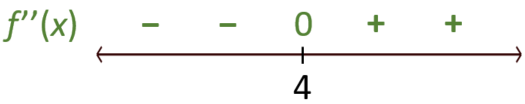
(c) Gegeven is de functie *f* van opgave (a). Bereken exact de coördinaten van het buigpunt.

Uitwerking: Figuur 2 suggereert dat (4, 2) het buigpunt is. De uitwerking moet exact en dus algebraïsch, dus we bepalen $f''(x)$, lossen daarna de vergelijking $f''(x) = 0$ op en controleren met behulp van een tekenschema of $f''(x)$ van teken verandert.

In opgave (a) is *f* al gedifferentieerd: $f'(x) = \frac{3}{2}(\frac{1}{2}x - 2)^2 - 2$.

Differentiëren van *f'* geeft $f''(x) = 2 \cdot \frac{3}{2}(\frac{1}{2}x - 2)^1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(\frac{1}{2}x - 2) = \frac{3}{4}x - 3$.

$f''(x) = 0$ geeft $\frac{3}{4}x - 3 = 0$. Deze eenvoudige lineaire vergelijking heeft $x = 4$ als oplossing.



Figuur 6

Uit het tekenschema (Figuur 6) blijkt dat $f''(x)$ van teken verandert bij $x = 4$, dus $x = 4$ is inderdaad de *x*-coördinaat van het buigpunt. Invullen van $x = 4$ in *f* geeft $f(4) = 2$.

Antwoord: het buigpunt van de grafiek van *f* heeft de coördinaten (4, 2).

---

[6] De grafiek van *f* kan ook een buigpunt hebben als $f''(x_B)$ *niet gedefinieerd* is én van teken verandert bij $x = x_B$. Dit is het geval bij onevenmachtswortelfuncties zoals $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Zie voor een grafiek van deze functie pagina 2 van het document 'Standaardfuncties en standaardgrafieken'. Differentiëren van *f* geeft $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ en differentiëren van *f'* geeft $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-1\frac{2}{3}} = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$. Bij $x = 0$ is $f''(x)$ niet gedefinieerd (omdat delen door 0 niet mogelijk is) en $f''(x)$ verandert van teken bij $x = 0$. Omdat $f(0) = 0$, is (0, 0) een buigpunt van de grafiek van *f*.

Redeneren met de afgeleide

Bij wiskunde A moet je aan de hand van de afgeleide, zonder dat je met je GR een tekening/schets maakt, kunnen beredeneren of een functie toenemend stijgend, afnemend stijgend, toenemend dalend of afnemend dalend is. Stel dat de gegeven functie $f(x)$ is. Je begint altijd met differentiëren om de afgeleide $f'(x)$ te bepalen. Aan de hand van het teken van $f'(x)$ en het verloop van $f'(x)$ met toenemende x kun je beredeneren wat (de grafiek van) f doet.

- $f'(x)$ is steeds positief en $f'(x)$ neemt toe met toenemende x — f is toenemend stijgend
- $f'(x)$ is steeds positief en $f'(x)$ neemt af met toenemende x — f is afnemend stijgend
- $f'(x)$ is steeds negatief en $f'(x)$ neemt af met toenemende x — f is toenemend dalend
- $f'(x)$ is steeds negatief en $f'(x)$ neemt toe met toenemende x — f is afnemend dalend

Voorbeeldopgave

(d) De moeilijkheidsgraad van wiskundige problemen die met computers worden opgelost stijgt exponentieel volgens de formule $D(t) = 3{,}65 \cdot e^{0{,}533t}$. Hierin is D een maat voor de moeilijkheidsgraad en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2013. Hoe groter D is, hoe moeilijker het op te lossen probleem is. Stel de formule van de afgeleide van D op en beredeneer hoe je aan deze formule kunt zien dat de grafiek van D toenemend stijgend is (*vraag 10 uit examen wiskunde A vwo 2018-1*.)

Uitwerking: D moet gedifferentieerd worden. De variabele is t en bij het differentiëren is de kettingregel nodig. Daarna moet onderzocht worden wat het teken van $D'(t)$ is en wat er met de grootte van $D'(t)$ gebeurt als t toeneemt.

$D'(t) = 3{,}65 \cdot e^{0{,}533t} \cdot 0{,}533 = 1{,}95 \cdot e^{0{,}533t}$ ($D'(t)$ kan ook worden genoteerd als $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$)

Omdat $e^{0{,}533t}$ te schrijven is als $(e^{0{,}533})^t \approx 1{,}704^t$, kunnen we schrijven: $D'(t) \approx 1{,}95 \cdot 1{,}704^t$. De uitkomst van een exponentiële functie $y = a \cdot g^t$ met $a > 0$ is altijd positief. Aangezien het grondtal $g \approx 1{,}704 > 1$ neemt $D'(t)$ toe als t toeneemt.

$D'(t)$ is altijd positief (de grafiek van D is dus stijgend) en $D'(t)$ neemt toe met toenemende t (de positieve helling van de grafiek van D wordt steeds groter). Dit betekent dat de grafiek van D inderdaad toenemend stijgend is.