Functies, grafieken en vergelijkingen

In dit document wordt uitgelegd wat functies zijn en hoe je de bijbehorende grafiek tekent. De relatie tussen het vinden van snijpunten van grafieken van functies en het oplossen van vergelijkingen wordt ook besproken.

Functies

In de wiskunde geven we een **functie** vaak aan met de letter f. Een functie kent aan elke toegestane waarde van de input, de **variabele** (meestal x), één output toe. Die output heet de **functiewaarde** en wordt vaak aangeduid met $f(x)$ of met y. Het **functievoorschrift** beschrijft de manier waarop deze toekenning gaat. Er zijn twee gangbare formele notaties voor functievoorschriften. Als voorbeeld nemen we een willekeurig gekozen functie (er bestaan oneindig veel functies):

$$f(x) = x^2 - 2x - 8 \qquad \text{(1a)}$$

$$f\colon\ x \to x^2 - 2x - 8 \qquad \text{(1b)}$$

Meestal wordt de $f(x)$ notatie zoals in 1a gebruikt. De x tussen haakjes verduidelijkt dat x de variabele is. Let op dat de dubbele punt in notatie 1b niet een deelteken is! Beide notaties betekenen hetzelfde: voor elke waarde van de variabele x is $x^2 - 2x - 8$ de functiewaarde.

Een minder formele notatie van bovenstaande functie is $y = x^2 - 2x - 8$. Deze notatie kom je vooral tegen in de context van het tekenen van de grafiek die bij een functie hoort. Het is ook de manier waarop je de functie invoert in je grafische rekenmachine.

Laten we enkele getallen voor x invullen om het wat concreter te maken. Er zijn oneindig veel getallen die we voor x in kunnen vullen, dus we maken een selectie. Dit hoeven geen gehele getallen te zijn. We noemen de waarde van de variabele x het **origineel** en de bijbehorende functiewaarde het **beeld**. Enkele voorbeelden, waarbij we voor x de getallen −3, 0, ½, 4 en π invullen:

$f(\mathbf{-3}) = (-3)^2 - 2\cdot{-3} - 8 = 9 + 6 - 8 = \mathbf{7}$ *bij het origineel −3 hoort het beeld 7*

$f(\mathbf{0}) = 0^2 - 2\cdot 0 - 8 = 0 - 0 - 8 = \mathbf{-8}$ *bij het origineel 0 hoort het beeld −8*

$f(\mathbf{\tfrac{1}{2}}) = (\tfrac{1}{2})^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2} - 8 = \tfrac{1}{4} - 1 - 8 = \mathbf{-8\tfrac{3}{4}}$ *bij het origineel ½ hoort het beeld −8¾*

$f(\mathbf{4}) = 4^2 - 2\cdot 4 - 8 = 16 - 8 - 8 = \mathbf{0}$ *bij het origineel 4 hoort het beeld 0*

$f(\boldsymbol{\pi}) = \pi^2 - 2\cdot\pi - 8 = \boldsymbol{\pi^2 - 2\pi - 8}$ *bij het origineel π hoort het beeld* $\pi^2 - 2\pi - 8$

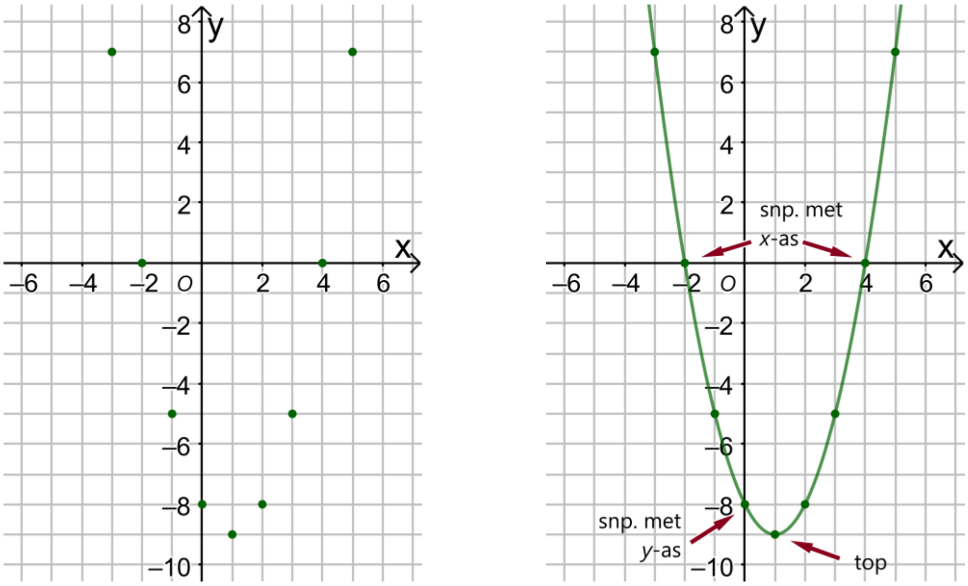
Grafieken

Van elke functie kunnen we de bijbehorende **grafiek** tekenen in een *Oxy*-assenstelsel. De grafiek van f bestaat uit alle punten $(x, f(x))$, dus uit alle (origineel, beeld) paren. Het is onmogelijk om *alle* punten $(x, f(x))$ te berekenen, dus we maken een selectie. Het is handig om eerst een **waardentabel** zoals hieronder te maken, waarbij je in de bovenste rij enkele waarden van x opschrijft en in de rij daaronder de bijbehorende berekende functiewaarden. Omdat de verticale as de y-as is, zie je vaak y in plaats van $f(x)$ staan. De tabel laat zien dat (−3, 7), (−2, 0), (−1, 5), etc. punten op de grafiek zijn.

Tabel 1. Waardentabel behorende bij de functie $f(x) = x^2 - 2x - 8$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y (= f(x))	7	0	−5	−8	−9	−8	−5	0	7

Je tekent nu in een assenstelsel de berekende punten (Figuur 1, links). Vervolgens trek je een vloeiende lijn door deze punten om de grafiek te verkrijgen (Figuur 1, rechts).



Figuur 1. Het tekenen van de grafiek die hoort bij de functie $f(x) = x^2 - 2x - 8$ (snp. is snijpunt)

Je kunt zelden de gehele grafiek van een functie tekenen; ook voor de grafiek van f in Figuur 1 is dat onmogelijk. Wel moeten belangrijke details van de grafiek afgebeeld zijn, zoals (indien aanwezig): snijpunt met de y-as, snijpunten met de x-as, toppen, randpunten, buigpunten en asymptoten.

Snijpunten van een grafiek met de assen; vergelijkingen oplossen

Je kunt ook *gericht* op zoek gaan naar snijpunten van de grafiek met de assen. Hierbij gebruik je de volgende informatie over de assen:

- voor alle punten op de y-as geldt: $x = 0$
- voor alle punten op de x-as geldt: $y = 0$

Er is maximaal één snijpunt met de y-as.[1] Deze bereken je simpelweg door $x = 0$ in te vullen in de functie. Voor onze functie f geldt dat $f(0) = -8$, dus het snijpunt van de grafiek met de y-as is $(0, -8)$.

Hoewel er maximaal één snijpunt met de y-as is, kunnen er best meer snijpunten met de x-as zijn, zoals je in Figuur 1 ziet. Om deze snijpunten te vinden, moeten we **vergelijking** $y = 0$, oftewel $f(x) = 0$, oplossen. In ons geval is dat de vergelijking $x^2 - 2x - 8 = 0$. Het **oplossen van een vergelijking** betekent: waarde(n) van x vinden waarbij er links en rechts van het isgelijkteken (=) hetzelfde staat, dus waarbij de vergelijking klopt. Als we de vergelijking $x^2 - 2x - 8 = 0$ oplossen,[2] vinden we $x = -2$ en $x = 4$ als oplossingen, dus de snijpunten van de grafiek met de x-as zijn $(-2, 0)$ en $(4, 0)$.
Waarden van x waarvoor geldt dat $f(x) = 0$ noemen we de **nulpunten** van f.

Maak dus goed het volgende onderscheid:

- $f(0)$ geeft de y-coördinaat van het eventuele snijpunt met de y-as
- $f(x) = 0$ oplossen geeft de x-coördinaten van eventuele snijpunten met de x-as

---

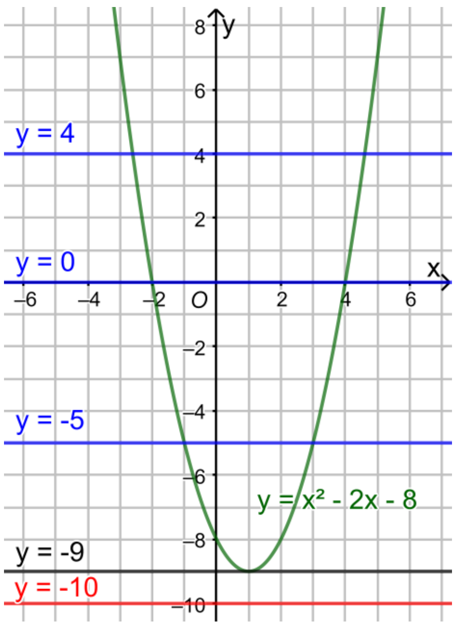
[1] Er bestaan functies die niet bestaan bij $x = 0$, zoals $f(x) = \frac{1}{x}$. Er is dan geen snijpunt met de y-as.

[2] Via ontbinden in factoren: $x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$ of $x - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ of $x = 4$.
Zie ook het document 'De balansmethode en het oplossen van lineaire en kwadratische vergelijkingen'.

Vergelijkingen oplossen en de relatie met snijpunten van grafieken

In de vorige paragraaf hebben we gezien dat het oplossen van de vergelijking $x^2 - 2x - 8 = 0$ je de snijpunten geeft van de grafieken van de functies $y = x^2 - 2x - 8$ en $y = 0$.[3] Je kreeg twee oplossingen voor x. Dat was te verwachten, omdat deze grafieken elkaar twee keer snijden. Daarom weten we dat bijvoorbeeld ook de vergelijkingen $x^2 - 2x - 8 = 4$ en $x^2 - 2x - 8 = -5$ allebei twee oplossingen voor x zullen hebben. Zie Figuur 2 hieronder.

Het wordt interessanter bij de vergelijking $x^2 - 2x - 8 = -9$. Uit Figuur 2 blijkt dat de grafieken van de functies $y = x^2 - 2x - 8$ en $y = -9$ elkaar slechts één keer snijden (het woord *raken* is hier eigenlijk correcter). Oplossen[4] van de vergelijking geeft inderdaad één oplossing voor x. Je ziet nu waarschijnlijk al aankomen dat de vergelijking $x^2 - 2x - 8 = -10$ geen oplossingen heeft, want de grafieken van de functies $y = x^2 - 2x - 8$ en $y = -10$ snijden of raken elkaar niet. Er zijn inderdaad geen oplossingen.[5]



Figuur 2. De grafieken van *$y = x^2 - 2x - 8$ en enkele horizontale lijnen*

Onthoud het volgende:

- Om de x-coördinaten van snijpunten van grafieken van twee functies te vinden, stel je de functies aan elkaar gelijk en los je de vergelijking op
- Zijn er geen oplossingen te vinden, dan snijden/raken de bijbehorende grafieken elkaar niet. Omgekeerd geldt ook: als grafieken van f en g elkaar niet snijden/raken, dan heeft de vergelijking $f(x) = g(x)$ geen oplossing.

---

[3] We hadden ook de formele notaties $f(x) = x^2 - 2x - 8$ en $g(x) = 0$ mogen gebruiken, maar $y = \ldots$ is eenvoudiger

[4] Oplossen: $x^2 - 2x - 8 = -9 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (x-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$

[5] Oplossen: $x^2 - 2x - 8 = -10 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x + 2 = 0 \;\Rightarrow\;$ discriminant = −4 (*abc*-formule) $\Rightarrow$ geen oplossingen

Voorbeeldopgaven

a) Gegeven zijn de functies $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ en $g(x) = -x + 1$. Welke vergelijking moet worden opgelost om x-waarden van eventuele snijpunten van de grafieken van f en g te vinden?

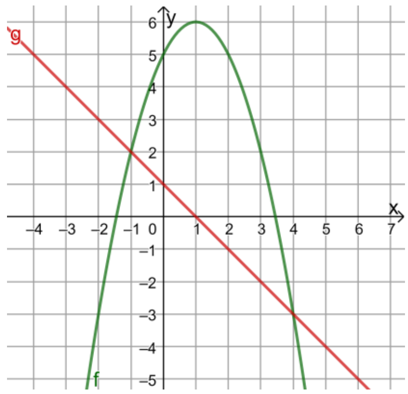
Uitwerking: we moeten $f(x)$ en $g(x)$ aan elkaar gelijkstellen, dus de vergelijking is $f(x) = g(x)$.

Antwoord: de benodigde vergelijking die moet worden opgelost is $-x^2 + 2x + 5 = -x + 1$

b) Wat zijn de coördinaten van de eventuele snijpunten van de grafieken van de bij a. genoemde functies? Als je al weet hoe je kwadratische vergelijkingen moet oplossen,[6] mag je deze opgave algebraïsch aanpakken. Anders mag je ook de grafieken tekenen en eventuele snijpunten aflezen.

Uitwerking: we lossen de vergelijking $-x^2 + 2x + 5 = -x + 1$ op. Dit geeft de x-coördinaten van de snijpunten. De y-coördinaten krijgen we door de oplossingen voor x in te vullen in $f(x)$ óf in $g(x)$.

$-x^2 + 2x + 5 = -x + 1$	
$-x^2 + 3x + 4 = 0$	rechterlid op 0 herleid
$x^2 - 3x - 4 = 0$	beide leden gedeeld door −1
$(x + 1)(x - 4) = 0$	ontbonden in factoren
$x + 1 = 0$ of $x - 4 = 0$	regel: A·B = 0, dan A = 0 of B = 0
$x = -1$ of $x = 4$	



Twee oplossingen voor x gevonden. Invullen in een van de functies (hier is gekozen voor functie g) geeft:

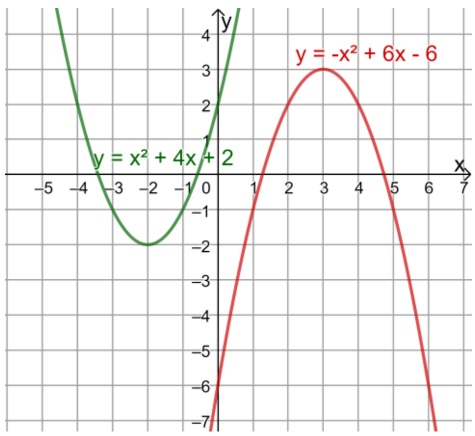
$$g(-1) = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$g(4) = -4 + 1 = -3$$

Antwoord: de snijpunten zijn (−1, 2) en (4, −3). Als je de grafieken zou hebben getekend in één assenstelsel (zie rechts), dan zou je deze snijpunten ook hebben kunnen aflezen.

c) Laat met grafieken zien hoeveel oplossingen de vergelijking $x^2 + 4x + 2 = -x^2 + 6x - 6$ heeft.

Uitwerking: we tekenen de grafieken van de functies $y = x^2 + 4x + 2$ en $y = -x^2 + 6x - 6$ in één assenstelsel en we kijken hoe vaak de twee grafieken elkaar snijden of raken.

Uit de figuur rechts blijkt dat er geen snijpunten of raakpunten zijn.



Antwoord: de vergelijking $x^2 + 4x + 2 = -x^2 + 6x - 6$ heeft geen oplossingen.

[6] Zie het document 'De balansmethode en het oplossen van lineaire en kwadratische vergelijkingen'