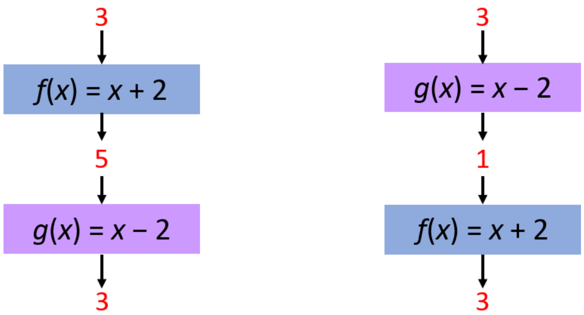
Functie en inverse functie

In dit document wordt besproken wat inverse functies zijn en hoe je het functievoorschrift van een inverse functie opstelt. Als voorkennis is het goed om te weten wat *domein* en *bereik* zijn (zie het document ‘Domein en bereik van functies’).

Wat zijn inverse functies?

We beschouwen de twee functies $f(x) = x + 2$ en $g(x) = x - 2$. Deze functies worden geschakeld, wat betekent dat de functiewaarde (uitvoer) van de ene functie als invoer wordt gebruikt in de andere functie.[1] Je ziet in Figuur 1 voorgedaan voor de willekeurig gekozen invoer 3: of je nu g na f schakelt of f na g, je krijgt uiteindelijk 3 terug als resultaat. Dus $g(f(3)) = 3$ en $f(g(3)) = 3$.



Figuur 1. Functies f en g zijn elkaars inverse

Dat je met hetzelfde getal eindigt als waarmee je begint, is waar voor elke waarde van x. De tweede functie doet het omgekeerde (*inverse*) van wat de eerste functie doet. Functies f en g heten elkaars **inverse (functie)**. De inverse van f kan worden genoteerd[2] met f^{inv}, dus $g = f^{\text{inv}}$ en $f = g^{\text{inv}}$.

Per definitie geldt voor inverse functies: $f^{\text{inv}}(f(x)) = x$ en $f(f^{\text{inv}}(x)) = x$.

Functievoorschrift van een inverse functie opstellen

Als een punt (a, b) op de grafiek van f ligt, dan moet het punt (b, a) op de grafiek van f^{inv} liggen. Uit Figuur 1 leid je bijvoorbeeld af dat $(3, 5)$ op de grafiek van f ligt en $(5, 3)$ op de grafiek van g (= f^{inv}). De x- en y-coördinaten zijn dus omgewisseld. Dit betekent dat het functievoorschrift van een inverse functie op te stellen is door (in de formulenotatie) x te vervangen door y en y door x, gevolgd door het vrijmaken van y. Zie hieronder enkele uitgewerkte voorbeelden.

Voorbeeldopgaven

(a) Stel het functievoorschrift op van de inverse van $f(x) = x + 2$.

- $y = x + 2$ — $f(x)$ vervangen door y (formulenotatie)
- $x = y + 2$ — $x \to y$ en $y \to x$
- $y = x - 2$ — y vrijgemaakt
- $f^{\text{inv}}(x) = x - 2$ — y vervangen door $f^{\text{inv}}(x)$ (functienotatie)

Dit komt inderdaad overeen met de gegeven inverse van f uit de eerste paragraaf.

[1] In het document ‘Differentiëren van functies’ (paragraaf *Kettingregel*) is het schakelen van functies uitgelegd.
[2] Soms wordt de notatie f^{-1} gebruikt. Dat kan verwarrend zijn; je zou kunnen denken dat $1/f$ bedoeld wordt.

(b) Stel het functievoorschrift op van de inverse van $y = 2x - 1$.

- $x = 2y - 1$ $\quad$ $x \rightarrow y$ en $y \rightarrow x$
- $2y = x + 1$
  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ $\quad$ y vrijgemaakt

(c) Stel het functievoorschrift op van de inverse van $g(x) = x^3 - 1$.

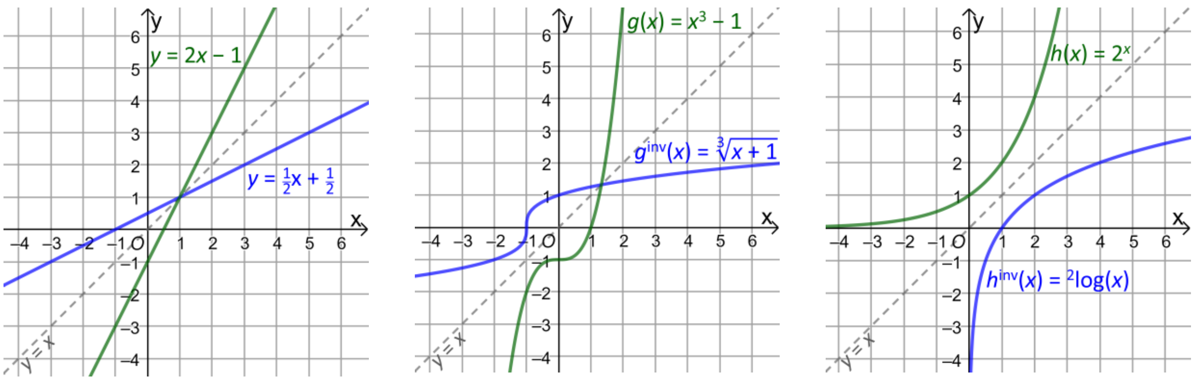
- $y = x^3 - 1$ $\quad$ formulenotatie
- $x = y^3 - 1$ $\quad$ $x \rightarrow y$ en $y \rightarrow x$
- $y^3 = x + 1$
  $y = \sqrt[3]{x + 1}$ $\quad$ y vrijgemaakt
- $g^{\mathrm{inv}}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$ $\quad$ functienotatie

Relatie tussen de grafieken van een functie en zijn inverse

Spiegeling in de lijn $y = x$

Aangezien de punten (a, b) en (b, a) aan elkaar gerelateerd zijn door middel van spiegeling in de lijn $y = x$, zijn de grafieken van inverse functies ook op die manier aan elkaar gerelateerd. Dit is in Figuur 2 voor enkele paren inverse functies geïllustreerd. Links en midden zijn grafieken van functies uit de voorbeeldopgaven (b) en (c) getekend. Rechts zijn de grafieken van de exponentiële functie $h(x) = 2^x$ en zijn inverse, de logaritmische[3] functie $h^{\mathrm{inv}}(x) = {}^2\log(x)$, getekend.

Er zijn gevallen waar grafieken van inverse functies gemeenschappelijke punten hebben (zie Figuur 2 links en midden). Indien aanwezig, liggen deze gemeenschappelijke punten altijd op de lijn $y = x$.



Figuur 2. Grafieken van inverse functies zijn lijnsymmetrisch ten opzichte van de lijn $y = x$

Domein en bereik

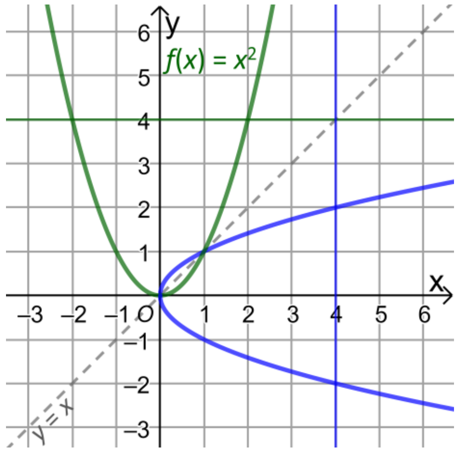
Vanwege het spiegelen van de grafieken in de lijn $y = x$, zullen het domein en bereik van inverse functies omwisselen ($D_{f^{\mathrm{inv}}} = B_f$ en $B_{f^{\mathrm{inv}}} = D_f$). In gevallen waar $D_f = B_f$ levert dit geen verandering op: voor functie $g(x) = x^3 - 1$ (Figuur 2) geldt dat $D_g = B_g = \mathbb{R}$ en dus is ook $D_{g^{\mathrm{inv}}} = B_{g^{\mathrm{inv}}} = \mathbb{R}$.
Echter, de exponentiële functie $h(x) = 2^x$ (Figuur 2) heeft $D_h = \mathbb{R}$ en $B_h = \langle 0, \rightarrow\rangle$, wat betekent dat $D_{h^{\mathrm{inv}}} = \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_{h^{\mathrm{inv}}} = \mathbb{R}$. Ook eventuele asymptoten spiegelen mee in de lijn $y = x$: de grafiek van h heeft de lijn $y = 0$ als horizontale asymptoot en dus heeft de grafiek van h^{inv} de lijn $x = 0$ als verticale asymptoot.

---

[3] Per definitie geldt dat ${}^g\log(g^x) = x$, dus de logaritmische functie $y = {}^g\log(x)$ is *gedefineerd* als de inverse van de exponentiële functie $y = g^x$.

Wanneer heeft een functie wel of niet een inverse?

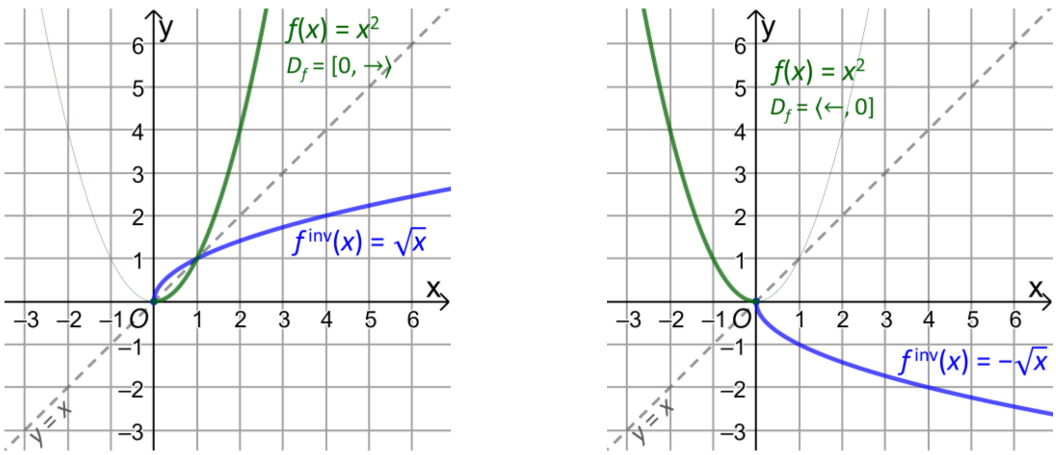
Je zou kunnen denken dat iedere functie een inverse heeft, maar dat is niet zonder meer het geval. Dit blijkt uit Figuur 3, waar de grafiek van de kwadratische functie $f(x) = x^2$ is getekend en ook gespiegeld in de lijn $y = x$. We bekijken als voorbeeld de punten (−2, 4) en (2, 4) die op de grafiek van f liggen. Na spiegeling in de lijn $y = x$ worden dit de punten (4, −2) en (4, 2) op de blauwe grafiek. Die grafiek is echter *niet* de grafiek van een functie f^{inv}, want dat zou impliceren dat de functiewaarde $f^{\text{inv}}(4)$ zowel −2 als 2 is. Bij een functie mag een invoer maar één functiewaarde geven.



Figuur 3. Op het domein $\mathbb{R}$ heeft $f(x) = x^2$ geen inverse

Uit de **horizontale-lijntest** kun je afleiden of de inverse wel of niet bestaat. Als er een horizontale lijn kan worden getekend die de grafiek van f twee of meer keren snijdt, zijn er twee of meer x-waarden zijn die dezelfde y-waarde geven. Bij spiegeling in de lijn $y = x$ leidt dit tot de situatie dat bij één x-waarde twee of meer y-waarden horen, zodat geen inverse bestaat.

De inverse van f bestaat alleen als elke horizontale lijn de grafiek van f hoogstens één keer snijdt.[4] Dit was bij de functies op pagina’s 1 en 2 steeds het geval. Ook bij $f(x) = x^2$ kunnen we hiervoor zorgen door het domein te beperken tot [0, →⟩ of ⟨←, 0]. De wortelfunctie $f^{\text{inv}}(x) = \sqrt{x}$ is de inverse van f met D_f = [0, →⟩ en $f^{\text{inv}}(x) = -\sqrt{x}$ is de inverse van f met D_f = ⟨←, 0] (zie Figuur 4).

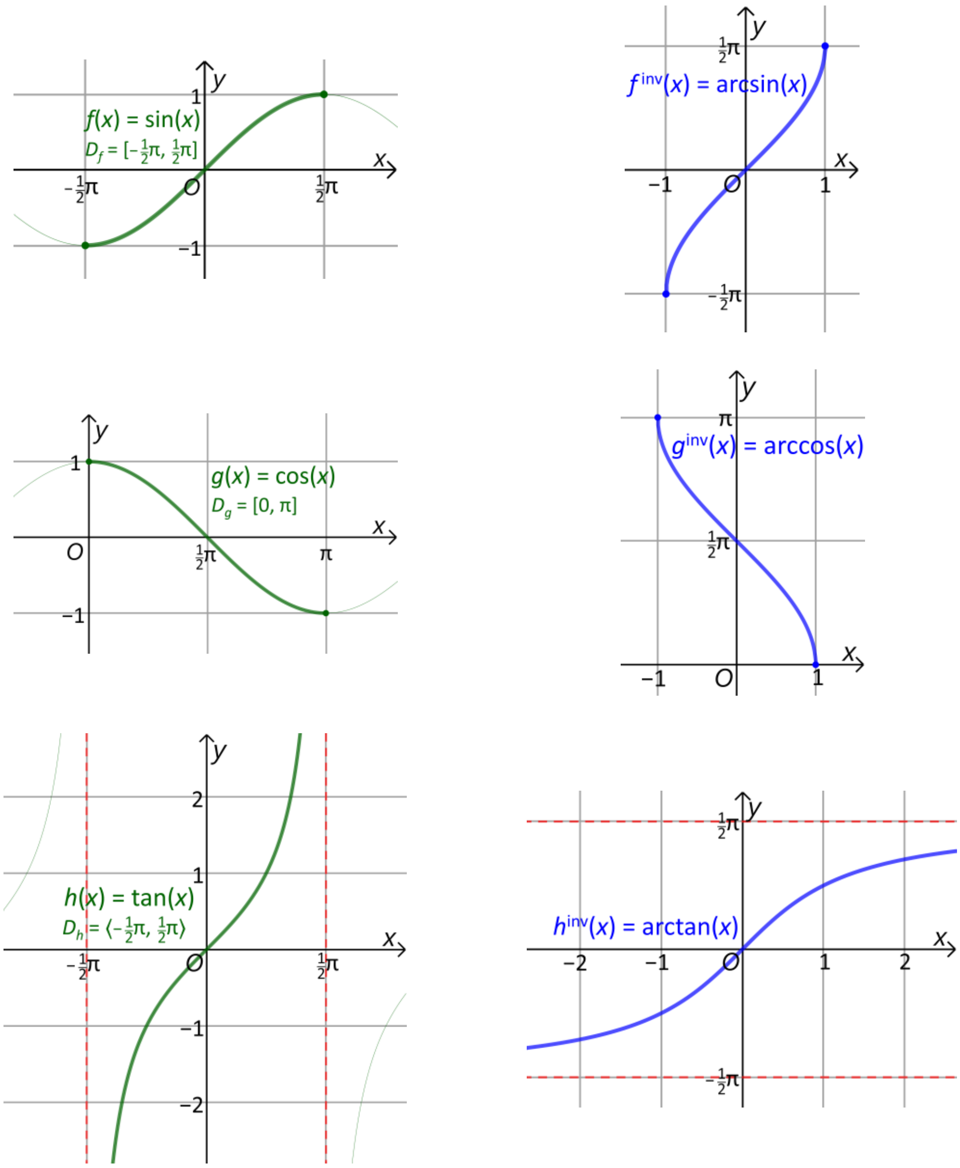


Figuur 4. Op het domein [0, →⟩ of ⟨←, 0] heeft $f(x) = x^2$ wél een inverse

[4] Zo’n functie f wordt in dat geval een één-op-één functie (of injectieve functie) genoemd.

Cyclometrische functies: inversen van goniometrische functies

De goniometrische functies $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ en $h(x) = \tan(x)$ zijn periodieke functies. Er zijn dus horizontale lijnen te tekenen die de grafiek[5] van zo'n functie oneindig vaak snijden, zodat de functie geen inverse heeft. Ook hier kan het domein zo gekozen worden dat er tóch een inverse bestaat. Zo'n inverse heet een **cyclometrische** functie: $f^{\text{inv}}(x) = \arcsin(x)$ is de inverse van $f(x) = \sin(x)$ met $D_f = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $g^{\text{inv}}(x) = \arccos(x)$ is de inverse van $g(x) = \cos(x)$ met $D_g = [0, \pi]$ en $h^{\text{inv}}(x) = \arctan(x)$ is de inverse van $h(x) = \tan(x)$ met $D_h = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Zie Figuur 5. Voor het overzicht worden grafieken van de inverse functies steeds naast elkaar getekend, in plaats van in één assenstelsel.



Figuur 5. Grafieken van goniometrische functies en hun inverse

Je gebruikt cyclometrische functies om een hoek te berekenen bij een bekende goniometrische verhouding (via SIN^{-1}, COS^{-1} of TAN^{-1} op je rekenmachine). Je ziet aan de grafiek van $f^{\text{inv}}(x) = \arcsin(x)$ bijvoorbeeld dat het bereik $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ (oftewel $[-90°, 90°]$) is. Je rekenmachine geeft dus een antwoord dat op dit bereik ligt. Ligt de hoek buiten dit bereik, dan maak je gebruik van de symmetrie van de sinusfunctie om de juiste hoek te verkrijgen.

[5] Zie pagina 4 van het document 'Standaardfuncties en standaardgrafieken'.

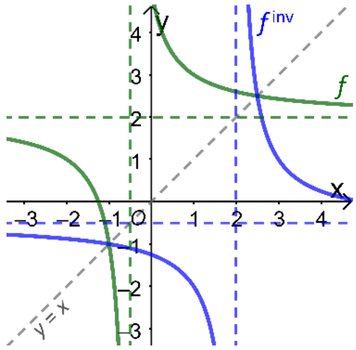
Extra voorbeeldopgaven

(d) Gegeven is de gebroken functie $f(x) = \frac{4x+5}{2x+1}$. Bepaal het functievoorschrift van f^{inv} en bereken exact de coördinaten van de twee gemeenschappelijke punten van de grafieken van f en f^{inv}.

- $y = \frac{4x+5}{2x+1}$ formulenotatie
- $x = \frac{4y+5}{2y+1}$ $x \rightarrow y$ en $y \rightarrow x$
- $x(2y+1) = 4y+5$
  $2xy + x = 4y + 5$
  $2xy - 4y = 5 - x$
  $y(2x-4) = 5 - x$
  $y = \frac{5-x}{2x-4}$ y vrijgemaakt
- $f^{\text{inv}}(x) = \frac{5-x}{2x-4}$ functienotatie

Om de gemeenschappelijke punten van de grafieken van f en f^{inv} te berekenen, zou je de vergelijking $f(x) = f^{\text{inv}}(x)$ op kunnen lossen. Maar aangezien deze punten op de lijn $y = x$ liggen, is het eenvoudiger om de vergelijking $f(x) = x$ op te lossen [$f^{\text{inv}}(x) = x$ kan ook].

$\frac{4x+5}{2x+1} = x$	
$4x + 5 = x(2x+1)$	*beide leden vermenigv. met 2x + 1*
$2x^2 + x = 4x + 5$	
$2x^2 - 3x - 5 = 0$	*rechterlid op 0 herleid*
$x = -1 \vee x = 2\frac{1}{2}$	*met behulp van de abc-formule*



Conclusie: de snijpunten zijn $(-1, -1)$ en $(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$. Zie rechts.

(e) Een functie f wordt gegeven door $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$. Deze functie heeft een inverse f^{inv}, waarvoor geldt: $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$. Bewijs dat f^{inv} inderdaad de inverse van f is (*vraag 14 uit examen wiskunde B vwo 2021-3*).

Je bent misschien geneigd om f^{inv} af te leiden uit f, zoals in eerdere voorbeeldopgaven:

- $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ formulenotatie
- $x = y^3 + 6y^2 + 12y + 9$ $x \rightarrow y$ en $y \rightarrow x$
- ???

De y komt voor in meerdere termen en je kunt alleen verder met het vrijmaken van y als je inziet dat $y^3 + 6y^2 + 12y + 9$ is te schrijven als $(y+2)^3 + 1$. Je kunt deze opgave echter eenvoudiger aanpakken. Omdat f en f^{inv} *elkaars* inverse zijn, zal moeten gelden dat $(f^{\text{inv}})^{\text{inv}} = f$. We gaan dus f afleiden uit f^{inv}:

- $y = -2 + \sqrt[3]{x-1}$ formulenotatie
- $x = -2 + \sqrt[3]{y-1}$ $x \rightarrow y$ en $y \rightarrow x$
- $\sqrt[3]{y-1} = x + 2$
  $y - 1 = (x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
  $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ y vrijgemaakt
- $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ functienotatie

Conclusie: het gevonden functievoorschrift van f komt overeen met het gegeven functievoorschrift van f, dus f^{inv} is de inverse van f.