Meetkunde in driehoeken

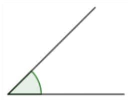
In dit document worden enkele principes van meetkunde in driehoeken (**trigonometrie**) behandeld. Trigonometrie speelt een grote rol in onder andere de landmeetkunde. De nadruk ligt op de sinus, cosinus en tangens van een hoek. Ook de sinusregel en de cosinusregel komen aan bod.

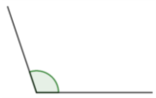
Voorkennis

Hoeken

Twee halve lijnen of lijnstukken die een gemeenschappelijk beginpunt hebben, vormen een **hoek**. Het beginpunt heet het **hoekpunt** en de halve lijnen of lijnstukken zijn de **benen** van de hoek. De grootte van de hoek is de kleinste draaiing om het hoekpunt die nodig is om een van de benen samen te laten vallen met het andere been. De grootte van de hoek wordt uitgedrukt in graden (°). Een **rechte hoek** is 90°, een **scherpe hoek** is kleiner dan 90° en een **stompe hoek** is groter dan 90°.

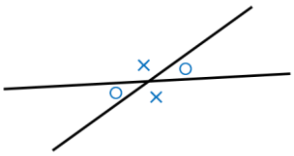

rechte hoek

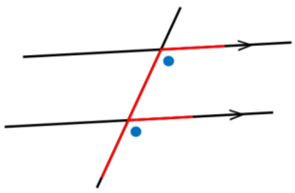

scherpe hoek

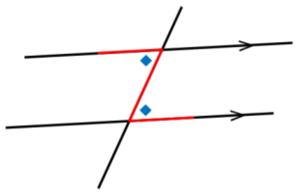

stompe hoek

Hoeken bij snijdende lijnen

Als twee lijnen elkaar snijden, ontstaan er twee paren gelijke **overstaande hoeken** (in de figuren hieronder zijn gelijke hoeken aangegeven met gelijke tekens). Met de hoek tussen twee lijnen wordt de kleinste hoek bedoeld. Als twee evenwijdige lijnen worden gesneden door een derde lijn, dan ontstaan meerdere paren **F-hoeken** en **Z-hoeken**, zoals hieronder steeds voor één paar gelijke hoeken is geïllustreerd (de F en Z zijn roodgemaakt; de F of Z kan ook gedraaid of gespiegeld zijn).

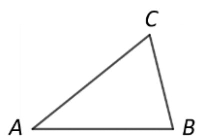

overstaande hoeken


F-hoeken

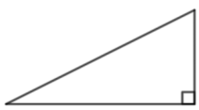

Z-hoeken

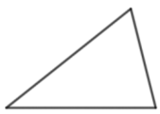
Driehoeken

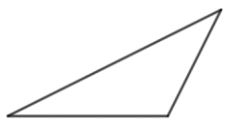
Als drie punten, die niet op één lijn liggen, met elkaar worden verbonden door middel van lijnstukken, ontstaat een **driehoek**. De lijnstukken zijn de **zijden** van de driehoek. Als de hoekpunten A, B en C zijn (ook andere hoofdletters kunnen worden gebruikt), dan wordt de driehoek genoteerd als $\triangle ABC$. De drie zijden kunnen dan AB, BC en AC worden genoemd. De hoek bij hoekpunt A kan worden genoteerd als $\angle A$ of als $\angle BAC$ of als $\angle CAB$.



Indeling op basis van de hoeken geeft drie soorten driehoeken: **rechthoekige** driehoeken (bevatten één rechte hoek en twee scherpe hoeken), **scherphoekige** driehoeken (bevatten drie scherpe hoeken) en **stomphoekige** driehoeken (bevatten één stompe hoek en twee scherpe hoeken).


rechthoekige driehoek

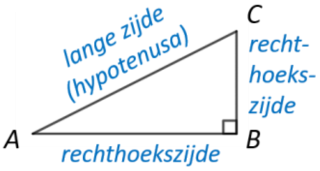

scherphoekige driehoek


stomphoekige driehoek

Voor elke driehoek geldt: de som van de drie hoeken is 180° (**hoekensom driehoek**).

Stelling van Pythagoras

In elke rechthoekige driehoek geldt de **stelling van Pythagoras**: het kwadraat van de lengte van de lange zijde is de som van de kwadraten van de lengten van de rechthoekszijden. In de figuur hiernaast zie je wat er met **lange zijde** en **rechthoekszijde** bedoeld wordt. De stelling wordt vaak gegeven in de vorm $a^2 + b^2 = c^2$. Let op dat c dan de lengte van de lange zijde is. [Als het kwadraat van de lengte van de langste zijde *kleiner* is dan de som van de kwadraten van de lengten van de overige zijden, dan is de driehoek scherphoekig. Als het kwadraat van de lengte van de langste zijde *groter* is dan de som van de kwadraten van de lengten van de overige zijden, dan is de driehoek stomphoekig.]

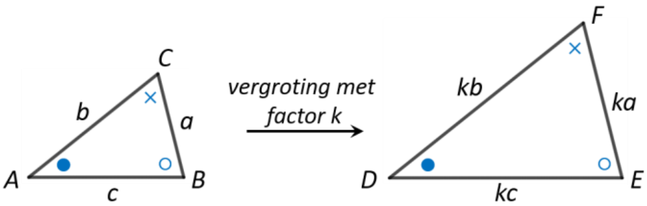


Stelling van Pythagoras:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

Gelijkvormigheid

Als driehoek *ABC* wordt vergroot met een vergrotingsfactor k ($k > 0$), dan worden alle zijden van de driehoek k keer zo groot en heeft de vergrote driehoek *DEF* dezelfde hoeken als de originele driehoek. Driehoeken *ABC* en *DEF* zijn **gelijkvormig** (notatie: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$). We noemen *AB* en *DE* **overeenkomstige zijden** (net zoals *BC* en *EF*; en *AC* en *DF*).

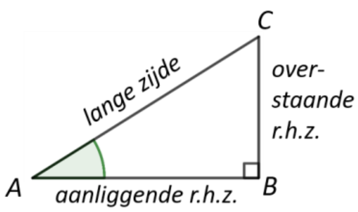


Als je van twee driehoeken kunt aantonen dat ze drie paren gelijke hoeken hebben *of* dat alle zijden met dezelfde factor zijn vermenigvuldigd, dan zijn de driehoeken gelijkvormig.

Sinus, cosinus en tangens van een hoek in rechthoekige driehoeken

Als van een rechthoekige driehoek de grootte van een scherpe hoek bekend is,[1] dan ligt de vorm van de rechthoekige driehoek vast, en daarmee ook de verhoudingen van de zijden. Die verhoudingen worden de **sinus**, **cosinus** en **tangens** van de hoek genoemd. Omdat de verhoudingen afhankelijk zijn van de grootte van de scherpe hoek, heten ze **goniometrische verhoudingen**.

De figuur hieronder laat zien hoe $\sin(\angle A)$, $\cos(\angle A)$ en $\tan(\angle A)$ gedefinieerd zijn (spreek $\sin(\angle A)$ uit als ‘de sinus van hoek *A*’ of als ‘de sinus behorende bij hoek *A*’).[2] Vanuit hoek *A* gekeken is *AB* de *aanliggende* rechthoekszijde (r.h.z.) en *BC* de *overstaande* rechthoekszijde. [Let op: kijk je vanuit hoek *C*, dan is *BC* de aanliggende rechthoekszijde en *AB* de overstaande rechthoekszijde.]



$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande r.h.z.}}{\text{lange zijde}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende r.h.z.}}{\text{lange zijde}} = \frac{AB}{AC}$$

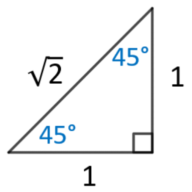
$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande r.h.z.}}{\text{aanliggende r.h.z.}} = \frac{BC}{AB}$$

Voor hoeken van 30°, 45° en 60° is exact te berekenen wat de bijbehorende waarden van de sinus, cosinus en tangens zijn, met behulp van een gelijkbenige rechthoekige driehoek (verhouding van de zijden is $1 : 1 : \sqrt{2}$) en een halve gelijkzijdige driehoek (verhouding van de zijden is $1 : \sqrt{3} : 2$). Zie de tabel en figuren op de volgende bladzijde. In de tabel wordt voor hoek het symbool α gebruikt.

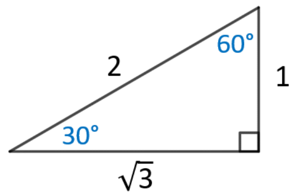
[1] Vanwege de hoekensom driehoek is dan ook de andere scherpe hoek bekend.

[2] Achter sin, cos en tan staat tussen haakjes altijd de hoek vermeld ten opzichte waarvan gekeken wordt.

α	30°	45°	60°
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha)$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$



gelijkbenige rechthoekige driehoek

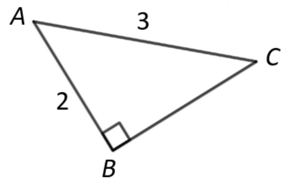


halve gelijkzijdige driehoek

Als de hoek bekend is, kun je op je rekenmachine met de knoppen SIN, COS of TAN een bijbehorende goniometrische verhouding berekenen. En als een goniometrische verhouding bekend is, kun je met de knoppen $\mathtt{SIN}^{-1}$, $\mathtt{COS}^{-1}$ of $\mathtt{TAN}^{-1}$ de bijbehorende hoek berekenen. Zie ook de voorbeeldopgaven.

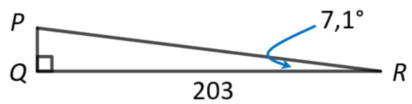
Voorbeeldopgaven goniometrische verhoudingen

a) Bereken $\angle A$ van $\triangle ABC$. Rond af op één decimaal.



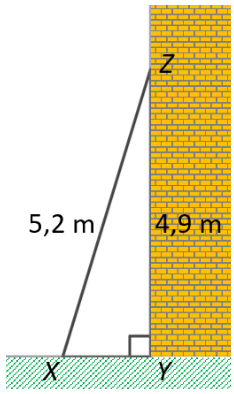
$$\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$
$$\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48{,}2°$$

b) Bereken zijde PQ van $\triangle PQR$. Rond af op gehelen.



$$\tan(\angle R) = \frac{PQ}{QR}$$
$$\tan(7{,}1°) = \frac{PQ}{203}$$
$$PQ = 203 \cdot \tan(7{,}1°) \approx 25$$

c) Je zet een ladder van 5,2 meter lang tegen een verticale muur, zodanig dat de bovenkant van de ladder 4,9 meter boven de grond komt. Wat is de hoek die de ladder met de grond maakt? Rond af op gehelen.

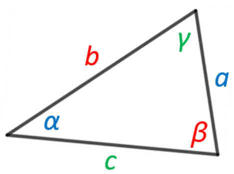


Uitwerking: bij deze situatie is een rechthoekige driehoek te schetsen. De letters mag je er zelf bij verzinnen. Hier moet hoek X berekend worden.

$$\sin(\angle X) = \frac{YZ}{XZ} = \frac{4{,}9}{5{,}2}$$
$$\angle X = \sin^{-1}\left(\frac{4{,}9}{5{,}2}\right) \approx 70°$$

Sinusregel en cosinusregel

Ook aan driehoeken die niet rechthoekig zijn, kan gerekend worden. In deze paragraaf leer je wanneer je de sinusregel en de cosinusregel kunt gebruiken. Daarin wordt voor de hoeken de Griekse letters alfa (α), bèta (β) en gamma (γ) gebruikt, en voor de zijden de letters a, b en c.



Let goed op: a is hierin gedefinieerd als de zijde *tegenover* hoek α, b als de zijde *tegenover* hoek β en c als de zijde *tegenover* hoek γ. Zie de figuur links. Welke hoofdletters je eventueel voor de hoekpunten gebruikt, is niet belangrijk. De sinusregel en de cosinusregel gelden voor alle soorten driehoeken (scherphoekig, stomphoekig, rechthoekig). Bij rechthoekige driehoeken is het eenvoudiger en aan te raden om te rekenen via de goniometrische verhoudingen zoals besproken in de vorige paragraaf.

Sinusregel

De **sinusregel** luidt als volgt: $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

Als je van een driehoek een hoek en de zijde tegenover deze hoek weet, en je hebt de beschikking over nóg een gegeven (hoek of zijde), dan kun je de sinusregel gebruiken om alle gegevens van de driehoek te berekenen. Als het extra gegeven een hoek is, dan is er maar één driehoek mogelijk. Als het extra gegeven een zijde is (en de gegeven hoek is scherp), dan zijn er soms twee driehoeken mogelijk: een scherphoekige en een stomphoekige. Dit heeft te maken met het feit[3] dat $\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)$. Hoe je hiermee omgaat, wordt in voorbeeldopgave e) verduidelijkt.

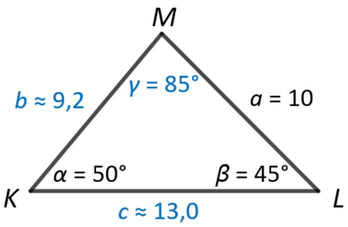
Voorbeeldopgaven sinusregel

d) Van $\triangle KLM$ is gegeven dat $\angle K = 50°$, $LM = 10$ en $\angle L = 45°$. Bereken de hoeken en zijden (in één decimaal) van $\triangle KLM$.

Uitwerking: LM is de zijde tegenover $\angle K$, dus de sinusregel is te gebruiken. We noemen $\angle K$, $\angle L$ en $\angle M$ respectievelijk α, β en γ. In dat geval zijn LM, KM en KL respectievelijk a, b en c. Gegeven zijn: $\alpha = 50°$, $\beta = 45°$ en $a = 10$. Via de hoekensom driehoek is γ te berekenen: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 85°$. De berekeningen van KM (b) en KL (c) staan hieronder uitgewerkt. In de driehoek zijn de berekende hoeken/zijden in het blauw weergegeven.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$
$$b = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{10 \cdot \sin(45°)}{\sin(50°)} \approx 9{,}2$$

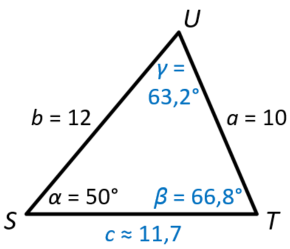
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$
$$c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{10 \cdot \sin(85°)}{\sin(50°)} \approx 13{,}0$$

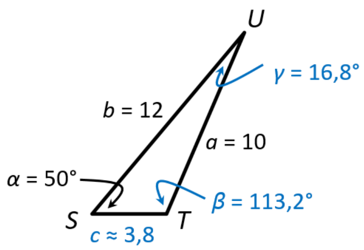


e) Van $\triangle STU$ is gegeven dat $\angle S = 50°$, $TU = 10$ en $SU = 12$. Bereken de hoeken en zijden (in één decimaal) van $\triangle STU$. Er is zowel een scherphoekige als een stomphoekige driehoek mogelijk.

Uitwerking: TU is de zijde tegenover $\angle S$, dus de sinusregel is te gebruiken. We noemen $\angle S$, $\angle T$ en $\angle U$ respectievelijk α, β en γ. In dat geval zijn TU, SU en ST respectievelijk a, b en c. Gegeven zijn: $\alpha = 50°$, $a = 10$ en $b = 12$. Hieronder staat de berekening van de twee mogelijke waarden van β. Voor beide waarden van β volgt γ uit de hoekensom driehoek en is c ook via de sinusregel te berekenen.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$
$$\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = \frac{12 \cdot \sin(50°)}{10} \approx 0{,}919\ldots$$
$$\beta = \sin^{-1}(0{,}919\ldots) \approx 66{,}8° \text{ óf}$$
$$\beta = 180° - \sin^{-1}(0{,}919\ldots) \approx 113{,}2°$$





f) In een landschap bevinden zich drie markante punten A, B en C (bijvoorbeeld torens; zie figuur op de volgende bladzijde). Een landmeter wil afstand AC weten, maar kan deze niet rechtstreeks meten vanwege de rivier. De landmeter kan AB wel meten (293 m). Vanuit punt A is de hoek tussen de kijklijnen naar B en C gemeten als 65,1° en vanuit punt B is de hoek tussen de kijklijnen naar A en C gemeten als 72,5°. Bereken AC (rond af op gehele meters).

---

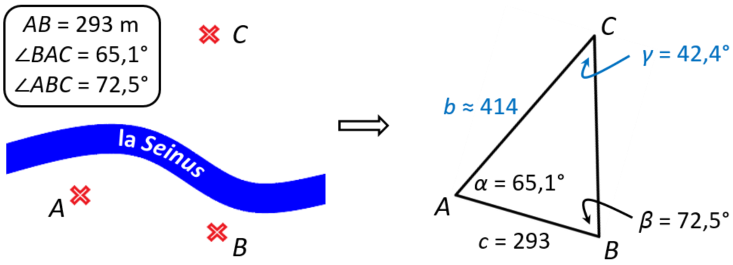
[3] In de vorige paragraaf werden $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ en $\tan(\alpha)$ gedefinieerd voor scherpe hoeken ($0° < \alpha < 90°$). Er bestaat een ruimere definitie (niet in dit document behandeld), die geldt voor *alle* hoeken.

Uitwerking: van △*ABC* is ∠*C* te berekenen via de hoekensom driehoek (∠*C* = 180° − 65,1° − 72,5° = 42,4°). Aangezien *AB* de zijde tegenover ∠*C* is, is de sinusregel te gebruiken. Als ∠*A*, ∠*B* en ∠*C* respectievelijk α, β en γ worden genoemd, dan zijn *BC*, *AC* en *AB* respectievelijk a, b en c. Bekend zijn dus: $\alpha = 65{,}1°$, $\beta = 72{,}5°$, $\gamma = 42{,}4°$ en $c = 293$. Hiermee is b te berekenen.

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$b = \frac{c \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{293 \cdot \sin(72{,}5°)}{\sin(42{,}4°)} \approx 414$$

De afstand *AC* is 414 m.



Cosinusregel

De **cosinusregel** luidt[4] als volgt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

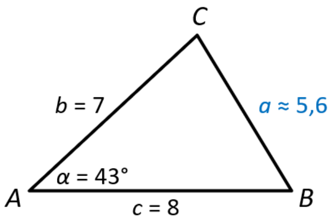
Als je van een driehoek twee zijden en de ingesloten hoek weet, dan kun je de cosinusregel gebruiken om de resterende zijde (tegenover de gegeven hoek) te berekenen. En als je van een driehoek alleen de drie zijden weet, kun je met de cosinusregel elke hoek berekenen.[5] Bij het berekenen van een hoek met de cosinusregel geeft je rekenmachine altijd de juiste hoek, omdat de cosinus van een scherpe hoek positief is en die van een stompe hoek negatief.[3]

Voorbeeldopgaven cosinusregel

g) Van △*ABC* is gegeven dat ∠*A* = 43°, *AB* = 8 en *AC* = 7. Bereken *BC*. Rond af op één decimaal.

Uitwerking: gegeven zijn twee zijden en de ingesloten hoek, dus de cosinusregel is te gebruiken. We noemen ∠*A*, ∠*B* en ∠*C* respectievelijk α, β en γ; dan zijn *BC*, *AC* en *AB* respectievelijk a, b en c. Gegeven zijn: $\alpha = 43°$, $b = 7$ en $c = 8$. De berekening van a staat hieronder uitgewerkt.

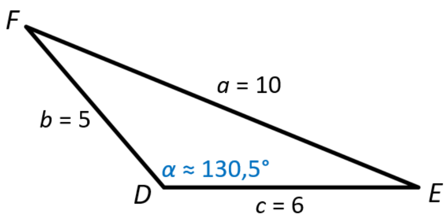
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$
$$a^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos(43°)$$
$$a^2 = 49 + 64 - 112 \cdot \cos(43°) = 31{,}088...$$
$$a = \sqrt{31{,}088...} \approx 5{,}6$$



h) Van △*DEF* is gegeven dat *DE* = 6, *EF* = 10 en *DF* = 5. Bereken ∠*D*. Rond af op één decimaal.

Uitwerking: gegeven zijn drie zijden, dus de cosinusregel is te gebruiken. We noemen ∠*D*, ∠*E* en ∠*F* respectievelijk α, β en γ. Dan zijn *EF*, *DF* en *DE* respectievelijk a, b en c. Gegeven zijn: $a = 10$, $b = 5$ en $c = 6$. De berekening van α staat hieronder uitgewerkt.

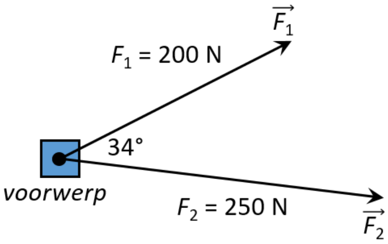
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$
$$10^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(\alpha)$$
$$100 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos(\alpha)$$
$$60 \cdot \cos(\alpha) = -39$$
$$\cos(\alpha) = -\frac{39}{60} = -\frac{13}{20}$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{13}{20}\right) \approx 130{,}5°$$



[4] Twee andere versies zijn: $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$ en $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$.

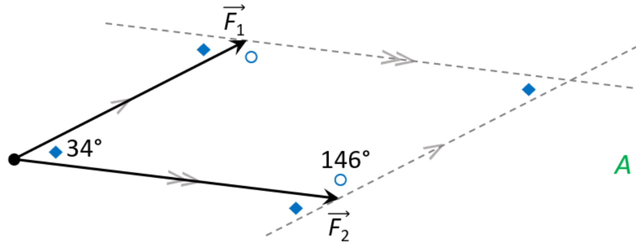
[5] Als je de cosinusregel gebruikt hebt, kun je de andere gegevens van de driehoek ook met behulp van de cosinusregel berekenen, maar het kan eenvoudiger zijn om daarna de sinusregel te gebruiken.

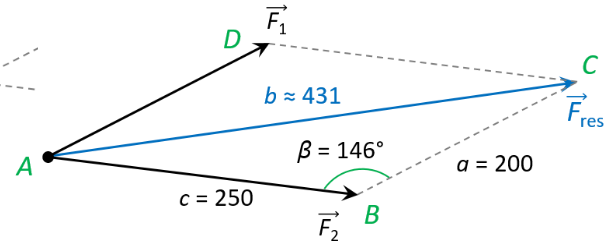
i) Op een voorwerp worden onder een hoek van 34° krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ uitgeoefend: F_1 = 200 N en F_2 = 250 N (N = newton, eenheid van kracht). Bereken de grootte van de resulterende kracht.



Uitwerking: je hebt wat kennis over natuurkunde nodig om dit probleem op te kunnen lossen. Kracht is een vectoriële grootheid (vector). Een vector heeft niet alleen een grootte, maar ook een richting. Een kracht wordt daarom getekend als een pijl. De vector wordt genoteerd als $\vec{F}$. Dus met $\vec{F}_1$ wordt de vector bedoeld en met F_1 wordt de grootte of lengte van de vector bedoeld.

De resulterende kracht $\vec{F}_{res}$ is het resultaat van het vectorieel optellen[6] van $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$, dus $\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Dit kan worden gedaan met de parallellogrammethode:[7] een hulplijn evenwijdig aan $\vec{F}_1$ wordt getrokken door de pijlpunt van $\vec{F}_2$ en een hulplijn evenwijdig aan $\vec{F}_2$ wordt getrokken door de pijlpunt van $\vec{F}_1$. Met behulp van Z-hoeken en F-hoeken is dan te beredeneren dat een parallellogram ontstaat met hoeken van 34° en 146° (180° − 34°), zoals je linksonder ziet. Waar de hulplijnen elkaar snijden, is het eindpunt van $\vec{F}_{res}$, die blauw getekend is in de figuur rechtsonder.





Omdat in een parallellogram overstaande evenwijdige zijden even lang zijn, zijn nu van $\triangle ABC$ twee zijden en de ingesloten hoek bekend, dus met de cosinusregel is de grootte van $\vec{F}_{res}$ te berekenen.[8]

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$
$$b^2 = 200^2 + 250^2 - 2 \cdot 200 \cdot 250 \cdot \cos(146°)$$
$$b^2 = 40000 + 62500 - 100000 \cdot \cos(146°) = 185403{,}7...$$
$$b = \sqrt{185403{,}7...} \approx 431$$

Antwoord: de grootte van de resulterende kracht is 431 N.

[6] Let op: $\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, maar $F_{res} \neq F_1 + F_2$

[7] Hetzelfde resultaat wordt verkregen als de kop-staartmethode wordt gebruikt.

[8] Berekening aan $\triangle ACD$ had hetzelfde resultaat opgeleverd.