Standaardfuncties en standaardgrafieken

Standaardfuncties zijn eenvoudige functies waarvan je de bijbehorende grafieken (die heten **standaardgrafieken**) snel moet kunnen schetsen. Ook moet je kunnen aangeven wat domein/bereik van een standaardfunctie zijn en welke eventuele bijzondere punten (top, punt van symmetrie, randpunt) en lijnen (symmetrie-as, asymptoot) een standaardgrafiek heeft.

In dit document worden de volgende typen standaardfuncties en hun grafieken behandeld: machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies.

Machtsfuncties

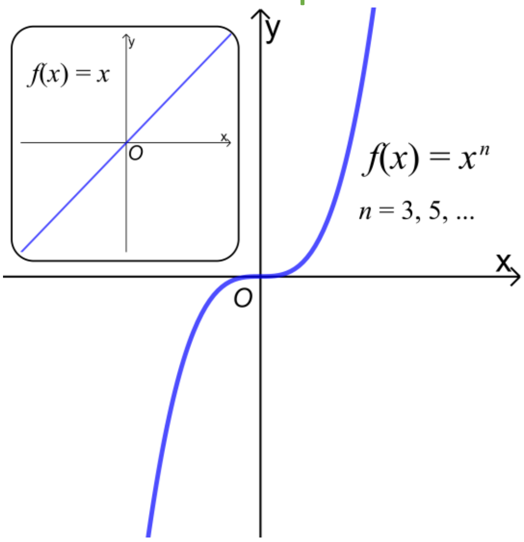
Een standaard machtsfunctie wordt vaak geschreven als $f(x) = a \cdot x^n$, met $a \neq 0$ en $n \in \mathbb{R}$. Hier nemen we $a = 1$, zodat we het eenvoudigere $f(x) = x^n$ krijgen. In de **macht** x^n heet de variabele x het **grondtal** en de constante n de **exponent**. Wat betreft het domein/bereik van de functies en de vorm van de grafieken is het nuttig om een onderverdeling zoals hieronder te maken.

waarde van *n*	naam van machtsfunctie	voorbeelden	
geheel en positief (1, 2, 3, ...)	*n*-degraadsfunctie	$f(x) = x$	$f(x) = x^2$
geheel en negatief (−1, −2, −3, ...)	gebroken functie	$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$	$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
positieve breuk ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$)	wortelfunctie	$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$	$f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

Standaard *n*-degraadsfuncties [$f(x) = x^n$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$]

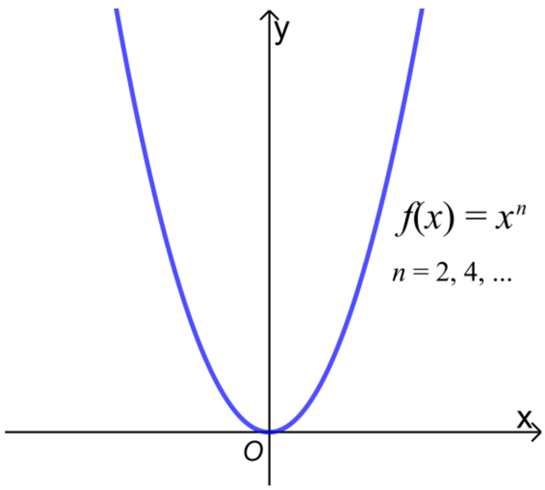
Het domein van f (D_f) is altijd $\mathbb{R}$. Het maakt voor de vorm van de grafiek uit of n oneven of even is, zoals je in de grafieken hieronder ziet. Bij oneven n is de oorsprong het **punt van symmetrie**, wat inhoudt dat $f(-x) = -f(x)$. Het bereik van f (B_f) is dan $\mathbb{R}$. [Bij oneven $n > 1$ is dit punt van symmetrie tevens een **buigpunt**, want er is een overgang van afnemend stijgend naar toenemend stijgend.]
Bij even n is de y-as de **symmetrie-as**, wat inhoudt dat $f(-x) = f(x)$. De oorsprong is de **top**. $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.

***n* oneven en positief**



$D_f = B_f = \mathbb{R}$
punt van symmetrie*: (0, 0)
*tevens buigpunt als $n > 1$

***n* even en positief**

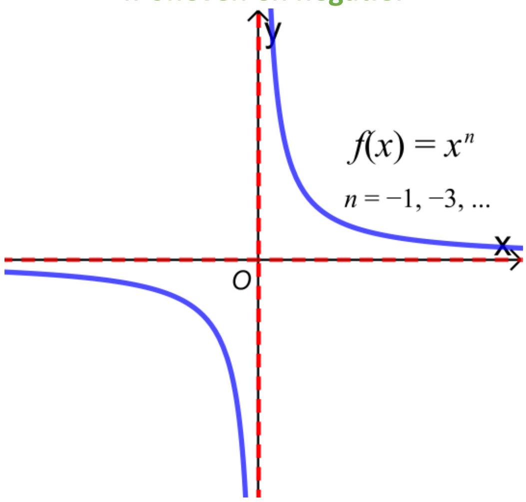


$D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [0, \rightarrow\rangle$
symmetrie-as: $x = 0$
top: (0, 0)

Standaard gebroken functies [$f(x) = x^n$ met $n = -1, -2, -3, \ldots$]

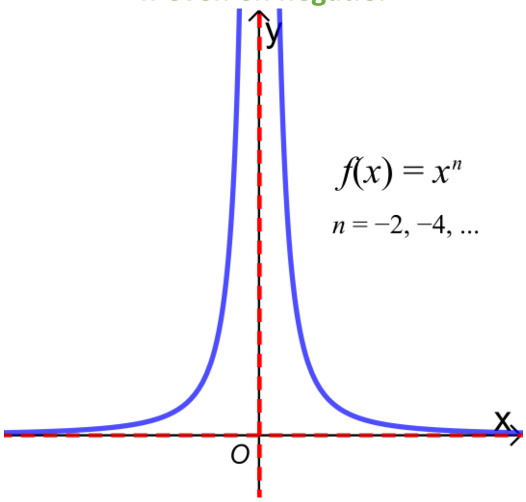
De functies $f(x) = \frac{1}{x^p}$ met $p = 1, 2, 3, \ldots$, kunnen worden geschreven als $f(x) = x^n$ met $n = -p$. Dit zijn **gebroken functies**, omdat de noemer 0 kan worden. Dit gebeurt bij $x = 0$, dat daardoor buiten het domein valt: $D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$. De grafieken van de functies bestaan uit twee takken en de y-as is de **verticale asymptoot**. Bij grote (positieve of negatieve) waarden van x neigt $f(x)$ naar 0, dus de x-as is de **horizontale asymptoot**. De asymptoten zijn steeds rood gestippeld. Het even of oneven zijn van n heeft ook hier invloed op de symmetrie van de grafiek en dus op B_f.

n oneven en negatief



$D_f = B_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$
punt van symmetrie: (0, 0)
asymptoten: $x = 0$ en $y = 0$

n even en negatief

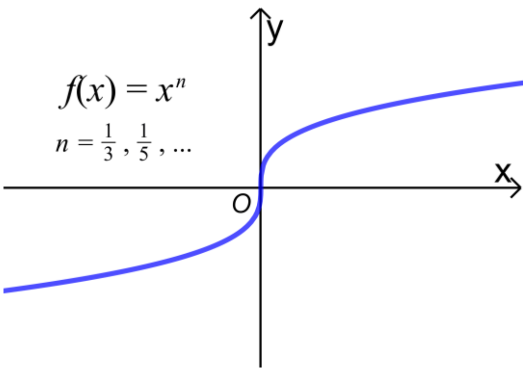


$D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$
symmetrie-as: $x = 0$
asymptoten: $x = 0$ en $y = 0$

Standaard wortelfuncties [$f(x) = x^n$ met $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$]

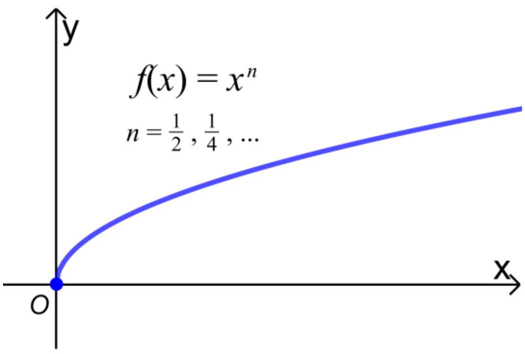
De **wortelfuncties** $f(x) = \sqrt[p]{x}$ met $p = 2, 3, 4, \ldots$, kunnen worden geschreven als $f(x) = x^n$ met $n = \frac{1}{p}$. Bij evenmachtswortelfuncties ($n = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$) kan alleen de wortel worden getrokken als $x \geq 0$ en ook de uitkomst is altijd groter dan of gelijk aan 0. Het domein en bereik van f zijn dus $[0, \rightarrow \rangle$. De grafiek heeft de oorsprong als **randpunt**. Bij onevenmachtswortelfuncties ($n = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$) kan ook van negatieve getallen de wortel worden getrokken, dus het domein is $\mathbb{R}$. De grafiek heeft nu de oorsprong als punt van symmetrie (hier tevens een buigpunt).

onevenmachtswortelfuncties



$D_f = B_f = \mathbb{R}$
punt van symmetrie (en buigpunt): (0, 0)

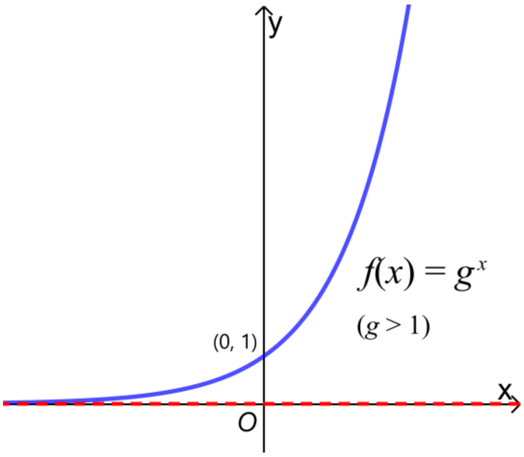
evenmachtswortelfuncties



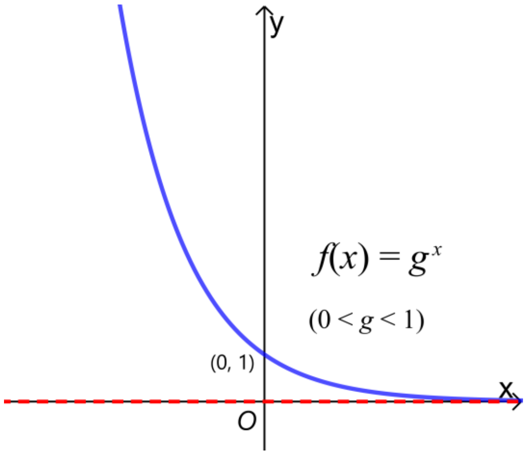
$D_f = B_f = [0, \rightarrow \rangle$
randpunt: (0, 0)

Exponentiële functies

Een standaard exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = g^x$, met $g > 0$ en $g \neq 1$. In een exponentiële functie is de constante g het grondtal en staat de variabele x in de exponent. Wat betreft de algemene vorm van de grafieken zijn er slechts twee gevallen te onderscheiden: $g > 1$ (de grafiek is stijgend) en $0 < g < 1$ (de grafiek is dalend). In alle gevallen geldt dat $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$. Als $g > 1$ wordt de horizontale asymptoot ($y = 0$) benaderd bij grote negatieve waarden van x; als $0 < g < 1$ gebeurt dit bij grote positieve waarden van x.



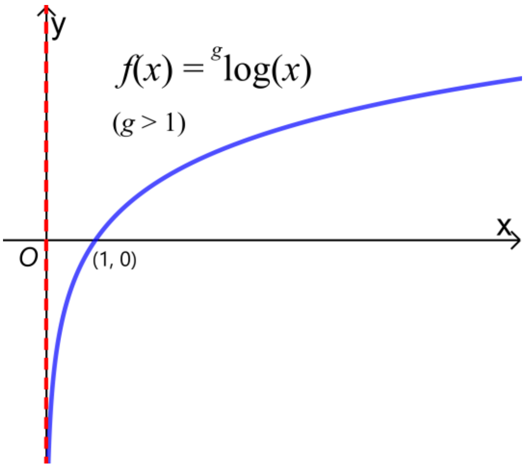
$D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$
horizontale asymptoot: $y = 0$
grafiek gaat door (0, 1)
grafiek is toenemend stijgend



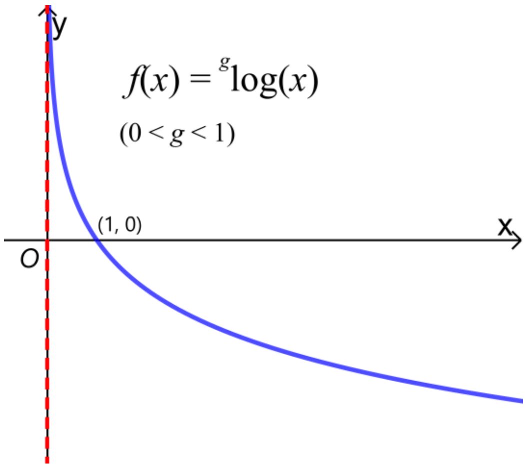
$D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$
horizontale asymptoot: $y = 0$
grafiek gaat door (0, 1)
grafiek is afnemend dalend

Logaritmische functies

Een standaard logaritmische functie heeft de vorm $f(x) = {}^g\log(x)$, met $g > 0$ en $g \neq 1$. De constante g heet ook hier het grondtal en de variabele x is het **argument** van de logaritme (het getal waarvan je de logaritme neemt). De functie $f(x) = {}^g\log(x)$ is de **inverse** van de functie $f(x) = g^x$, dus de grafieken hieronder kunnen worden verkregen door spiegeling bovenstaande grafieken in de lijn $y = x$. Hierdoor is de verticale asymptoot $x = 0$ en worden domein en bereik omgewisseld.



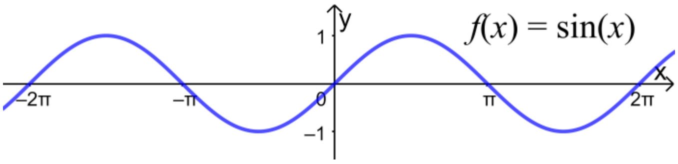
$D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$
verticale asymptoot: $x = 0$
grafiek gaat door (1, 0)
grafiek is afnemend stijgend



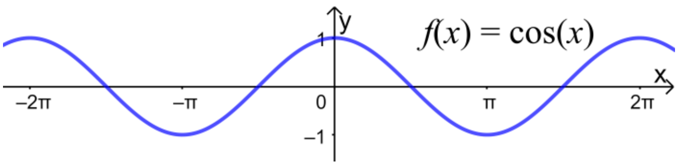
$D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$
verticale asymptoot: $x = 0$
grafiek gaat door (1, 0)
grafiek is afnemend dalend

Goniometrische functies

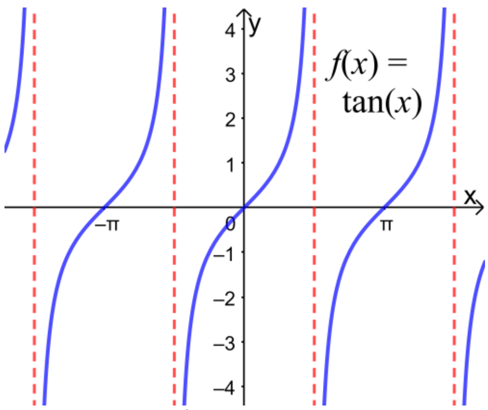
De goniometrische functies $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$ en $f(x) = \tan(x)$ worden vanuit de eenheidscirkel gedefinieerd (een volledige uitleg daarvan wordt hier niet gegeven). In deze functies noemen we de variabele x het **argument**: het getal waarvan je de sinus, cosinus of tangens neemt. De variabele x kun je je het beste voorstellen als een hoek (gonia, γωνία, is Oudgrieks voor hoek). De hoekeenheid die wordt gebruikt is **radiaal**[1] in plaats van graden. Goniometrische functies zijn **periodiek** — ze herhalen zichzelf na een bepaald interval, dat de **periode** wordt genoemd. De standaard sinus- en cosinusfuncties hebben een periode van 2π. De standaard tangensfunctie heeft een periode van π.



$D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [-1, 1]$
toppen[2]: $(\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi, 1)$ en $(1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi, -1)$
symmetrie-assen: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
punten van symmetrie (en buigpunten): $(k \cdot \pi, 0)$



$D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [-1, 1]$
toppen: $(k \cdot 2\pi, 1)$ en $(\pi + k \cdot 2\pi, -1)$
symmetrie-assen: $x = k \cdot \pi$
punten van symmetrie (en buigpunten): $(\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi, 0)$



D_f: $x \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ en $B_f = \mathbb{R}$
verticale asymptoten: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
punten van symmetrie: $(k \cdot \frac{1}{2}\pi, 0)$
buigpunten: $(k \cdot \pi, 0)$

---

[1] In een cirkel met straal r is een hoek van 1 radiaal de middelpuntshoek die hoort bij een cirkelboog met lengte r. Omdat een cirkel met straal r een omtrek van $2\pi r$ heeft, passen er 2π radialen in een volledige draai, dus 360° = 2π radialen. Het differentiëren en primitiveren van goniometrische functies is veel eenvoudiger als de variabele in radialen wordt uitgedrukt.

[2] k is een geheel getal (..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...), dus $k \in \mathbb{Z}$

Wat kun je met kennis over standaardfuncties en standaardgrafieken?

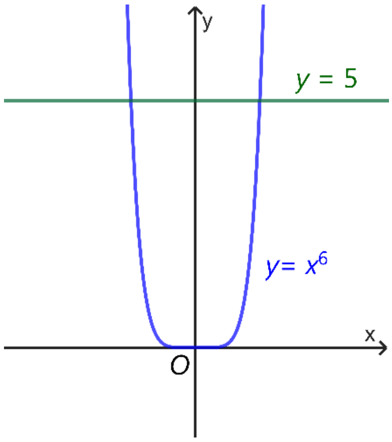
Zoals je in het document ‘Transformaties van grafieken’ kunt lezen, kunnen op grafieken *transformaties* worden uitgevoerd: een grafiek kan worden verschoven, uitgerekt, ingedrukt of gespiegeld. Als je transformaties uitvoert op een grafiek van een standaardfunctie (waarvan je dus weet wat het domein en bereik zijn en waar bijzondere punten/lijnen liggen), dan weet je wat het domein en bereik van de nieuwe functie zijn en waar de bijzondere punten/lijnen in de getransformeerde grafiek komen te liggen. Je kunt de getransformeerde grafiek dan snel schetsen.

Kennis van standaardgrafieken helpt soms ook om te bepalen *hoeveel* oplossingen een vergelijking kan hebben. Dit wordt hieronder uitgewerkt in een voorbeeldopgave.

Voorbeeldopgave

(a) Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^6 = 5$?

Uitwerking: we moeten kijken hoe vaak de grafieken van $y = x^6$ en $y = 5$ elkaar snijden/raken. De grafiek van de zesdegraadsfunctie $y = x^6$ ziet er ongeveer uit zoals de afgebeelde grafiek rechtsonder op pagina 1 (iets U-vormiger, maar dat heeft geen invloed op de conclusie). De grafiek van $y = 5$ zal deze grafiek twee keer snijden, zoals je in de schets hiernaast ziet.



Antwoord: de vergelijking $x^6 = 5$ heeft twee oplossingen.

Probeer deze opgaven zelf te doen. Hoeveel oplossingen hebben de volgende vergelijkingen?

- $x^6 = -3$
- $x^6 = 0$
- $x^3 = -\pi$
- $x^{-2} = 1$
- $\sqrt[4]{x} = -3$
- $e^x = 5$ (e, het getal van Euler, is ongeveer 2,718)
- $0{,}2^x = -5$
- $\sin(x) = \frac{1}{2}$, met x op $[0, 2\pi]$