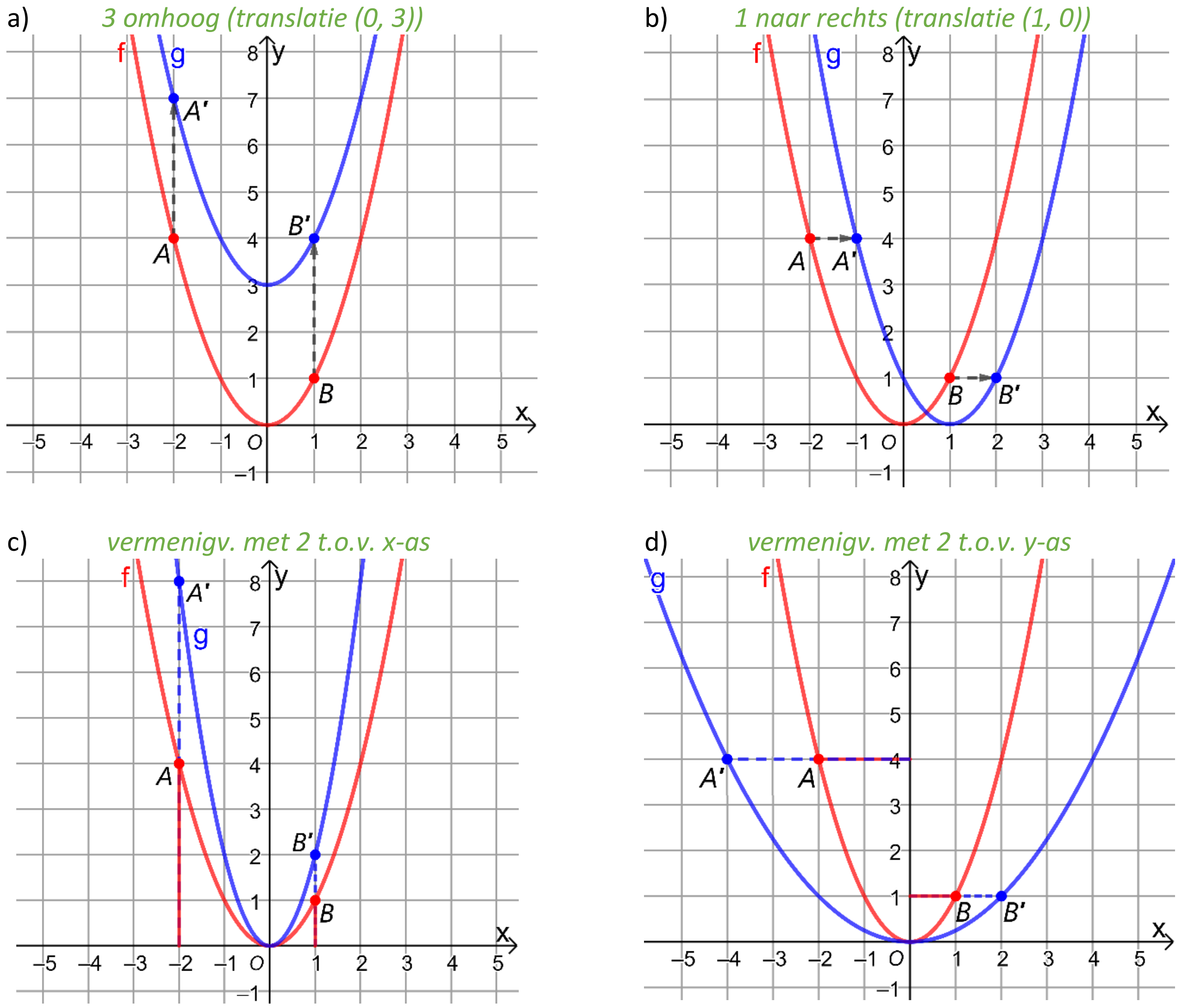
Transformaties van grafieken

Wat zijn transformaties?

Grafieken van functies kunnen op meerdere manieren worden veranderd — zo’n verandering heet een **transformatie**. Dit kan een **translatie** (verschuiving) zijn, in verticale en/of horizontale richting, waarbij de vorm van de grafiek hetzelfde blijft. Een **vermenigvuldiging** is ook mogelijk, ten opzichte van de *x*-as en/of de *y*-as, waarbij de grafiek verticaal/horizontaal uitgerekt, ingedrukt en/of gespiegeld wordt. In dit document zie je voorbeelden van transformaties en leer je hoe je het functievoorschrift dat hoort bij de **beeldgrafiek** (de getransformeerde grafiek) kunt opstellen. Het is aan te raden om het document ‘Standaardfuncties en standaardgrafieken’ eerst door te nemen.

Illustratie van vier mogelijke transformaties

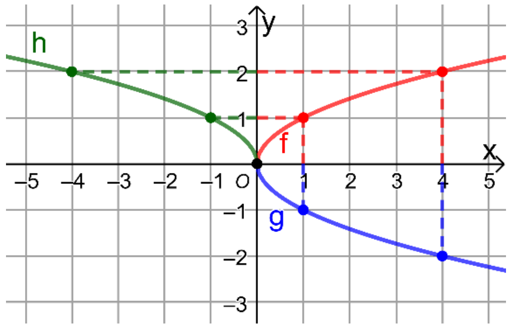
In Figuur 1 wordt de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ op vier manieren getransformeerd. Ter illustratie wordt tevens van de (willekeurig gekozen) punten $A(-2, 4)$ en $B(1, 1)$ aangegeven wat de **beeldpunten** A' en B' zijn. Een translatie van p in de horizontale richting en q in de verticale richting wordt genoteerd als translatie (p, q). Bij een vermenigvuldiging met c ($c \neq 0$) ten opzichte van de *x*-as wordt alleen de *y*-coördinaat met c vermenigvuldigd. Bij een vermenigvuldiging met d ($d \neq 0$) ten opzichte van de *y*-as wordt alleen de *x*-coördinaat met d vermenigvuldigd.



Figuur 1. Vier transformaties op de grafiek van de functie $f(x) = x^2$. De beeldgrafiek is steeds blauw getekend.

Spiegeling in de x-as of de y-as

Spiegeling in een as is een vermenigvuldiging met −1. Om een grafiek te spiegelen in de x-as, moet er vermenigvuldigd worden met −1 ten opzichte van de x-as. En om te spiegelen in de y-as, moet er vermenigvuldigd worden met −1 ten opzichte van de y-as. In Figuur 2 wordt de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ op beide manieren gespiegeld. De blauwe grafiek is het resultaat van spiegeling in de x-as en de groene grafiek is het resultaat van spiegeling in de y-as. Het randpunt (0, 0) blijft ongewijzigd en hoort bij alle drie grafieken.

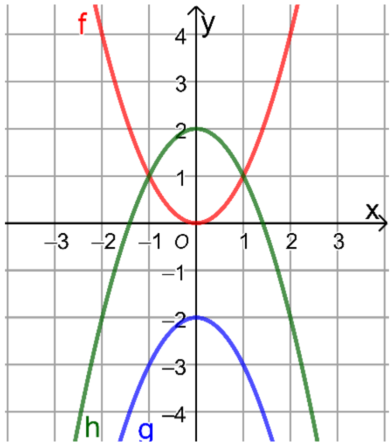


Figuur 2

Meerdere transformaties na elkaar

In Figuur 1 op de vorige bladzijde is steeds het effect van één transformatie afgebeeld. Het komt ook voor dat een grafiek meerdere transformaties na elkaar ondergaat. Bij een translatie (p, q) maakt het niet uit of eerst de horizontale of de verticale translatie wordt uitgevoerd. Ook als alleen vermenigvuldigingen worden gedaan, maakt het niet uit of eerst de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as of ten opzichte van de y-as wordt uitgevoerd.

Als zowel translaties als vermenigvuldigingen plaatsvinden, kan de volgorde wel uitmaken. Dit is bijvoorbeeld het geval als er zowel een verticale translatie als een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as wordt uitgevoerd, zoals in Figuur 3 is geïllustreerd. Als de grafiek van $f(x) = x^2$ eerst 2 omhoog wordt geschoven en daarna wordt gespiegeld in de x-as, krijg je de blauwe grafiek. Spiegel je eerst in de x-as om daarna 2 omhoog te schuiven, dan krijg je de groene grafiek.



Figuur 3

Effect van transformaties op het functievoorschrift

Elk van de vier transformaties heeft een uniek effect op het functievoorschrift. Dit is in Tabel 1 samengevat. Hier is f steeds de functie die bij de originele grafiek hoort en g de functie die bij de beeldgrafiek hoort. Hieronder wordt dit met voorbeelden verduidelijkt.

Tabel 1. Transformatie op de grafiek van f en effect op het functievoorschrift van g

transformatie	hoe ontstaat functie g uit f?	(formele notatie)
translatie (0, q)	tel q bij de functie op	$g(x) = f(x) + q$
translatie (p, 0)	vervang x door $x - p$	$g(x) = f(x - p)$
vermenigv. met c t.o.v. x-as	vermenigvuldig de functie met c	$g(x) = c \cdot f(x)$
vermenigv. met d t.o.v. y-as	vervang x door $\frac{x}{d}$ $(= \frac{1}{d} \cdot x)$	$g(x) = f(\frac{1}{d} \cdot x)$

In Figuur 1 begonnen we steeds met de grafiek van $f(x) = x^2$. Met behulp van Tabel 1 is het nu mogelijk om het functievoorschrift g behorende bij elke beeldgrafiek te geven.

- Figuur 1a: translatie (0, 3) $g(x) = f(x) + 3 = x^2 + 3$
- Figuur 1b: translatie (1, 0) $g(x) = f(x - 1) = (x - 1)^2$
- Figuur 1c: vermenigv. met 2 t.o.v. x-as $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2x^2$
- Figuur 1d: vermenigv. met 2 t.o.v. y-as $g(x) = f(\frac{1}{2}x) = (\frac{1}{2}x)^2$

Effect van transformaties op punten, lijnen, domein en bereik

In Tabel 2 hieronder is kort samengevat hoe een transformatie de coördinaten van punten en de formules van verticale en horizontale lijnen beïnvloedt.

Tabel 2. Effect van transformaties op punten en op formules van verticale/horizontale lijnen

vóór transformatie	na translatie ...		na vermenigvuldiging met ...	
	$(0, q)$	$(p, 0)$	c t.o.v. x-as	d t.o.v. y-as
punt $A(x_A, y_A)$	$A'(x_A, y_A + q)$	$A'(x_A + p, y_A)$	$A'(x_A, c \cdot y_A)$	$A'(d \cdot x_A, y_A)$
verticale lijn $x = a$	$x = a$	$x = a + p$	$x = a$	$x = d \cdot a$
horizontale lijn $y = b$	$y = b + q$	$y = b$	$y = c \cdot b$	$y = b$

Als het domein van de originele functie f $\mathbb{R}$ is, dan zal het domein van de nieuwe functie g ook $\mathbb{R}$ zijn, ongeacht de transformatie. Dit geldt ook voor het bereik. Echter, als het domein van f niet $\mathbb{R}$ is, dan zal een horizontale verschuiving ervoor zorgen dat g een ander domein heeft (het domein 'schuift mee', zou je kunnen zeggen). Een vermenigvuldiging met d ten opzichte van de y-as *kan* het domein beïnvloeden.[1] Evenzo, als het bereik van de originele functie f niet $\mathbb{R}$ is, dan zal een verticale verschuiving ervoor zorgen dat g een ander bereik heeft (het bereik 'schuift mee'). Een vermenigvuldiging met c ten opzichte van de x-as *kan* het bereik beïnvloeden.[1]

Voorbeeldopgaven: meerdere transformaties op standaardgrafieken

We kunnen met de informatie hierboven bijhouden wat er met punten (toppen, buigpunten, randpunten, punten van symmetrie), lijnen (asymptoten, symmetrie-assen), domein en bereik gebeurt bij opeenvolgende transformaties op *standaardgrafieken*. Zie de voorbeelden hieronder.

a) Op de grafiek van de standaardfunctie $y = \sqrt{x}$ worden na elkaar de volgende transformaties uitgevoerd: translatie (0, 1), vermenigvuldiging met 3 t.o.v. de x-as, translatie (−2, 0) en spiegeling in de y-as. Wat is het functievoorschrift dat behoort bij de verkregen grafiek? Geef ook domein en bereik van de verkregen functie en de coördinaten van het randpunt.

Uitwerking: zie de tabel hieronder. De laatste rij van de tabel bevat het eindantwoord.[2]

transformatie	*functie*	*domein*	*bereik*	*randpunt*
	$y = \sqrt{x}$	$[0, \rightarrow\rangle$	$[0, \rightarrow\rangle$	$(0, 0)$
translatie (0, 1)	↓			
(1 bij de functie optellen)	$y = \sqrt{x} + 1$	$[0, \rightarrow\rangle$	$[1, \rightarrow\rangle$	$(0, 1)$
vermenigv. met 3 t.o.v. *x*-as	↓			
(functie met 3 vermenigv.)	$y = 3(\sqrt{x} + 1) = 3\sqrt{x} + 3$	$[0, \rightarrow\rangle$	$[3, \rightarrow\rangle$	$(0, 3)$
translatie (−2, 0)	↓			
(x vervangen door x − −2 (= x + 2))	$y = 3\sqrt{x + 2} + 3$	$[-2, \rightarrow\rangle$	$[3, \rightarrow\rangle$	$(-2, 3)$
vermenigv. met −1 t.o.v. *y*-as	↓			
(x vervangen door $\frac{x}{-1}$ (= −x))	$\mathbf{y = 3\sqrt{-x + 2} + 3}$	$\langle\leftarrow, 2]$	$[3, \rightarrow\rangle$	**(2, 3)**

[1] Het effect van vermenigvuldigingen op het domein en bereik zijn niet zo kort te noteren als het effect op punten en horizontale/verticale lijnen. Laten we het effect van een vermenigvuldiging met c t.o.v. de x-as op het bereik beschouwen. Voorbeeld 1: stel dat $B_f = [a, b\rangle$. Als $c > 0$ dan geldt: $B_g = [c \cdot a, c \cdot b\rangle$. Als $c < 0$, dan geldt: $B_g = \langle c \cdot b, c \cdot a]$, want $c \cdot b < c \cdot a$ als $c < 0$. Voorbeeld 2: stel dat $B_f = [0, \rightarrow\rangle$. Als $c > 0$ dan geldt: $B_g = [0, \rightarrow\rangle$ (bereik is dus niet veranderd). Als $c < 0$, dan geldt: $B_g = \langle\leftarrow, 0]$. Zie ook de uitgewerkte voorbeeldopgaven.

[2] Voor het gemak wordt de notatie $y = \ldots$ gebruikt. Ook zou je letters f, g, h, etc. mogen gebruiken.
Tip: probeer de vier transformaties ook in enkele andere volgordes te doen. Je zult zien dat de volgorde invloed kan hebben op het uiteindelijke functievoorschrift, zoals eerder besproken.

b) Op de grafiek van de standaardfunctie $y = \frac{1}{x^2}$ worden na elkaar de volgende transformaties uitgevoerd: vermenigvuldiging met −2 t.o.v. de x-as, translatie (3, 0), vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ t.o.v. de y-as en translatie (0, −2). Wat is het functievoorschrift dat behoort bij de verkregen grafiek? Geef ook domein en bereik van de verkregen functie en geef bijzondere lijnen van de grafiek.

Uitwerking: de grafiek van $y = \frac{1}{x^2}$ heeft $x = 0$ als de verticale asymptoot (V.A.) en $y = 0$ als de horizontale asymptoot (H.A.) De verticale asymptoot is tevens de symmetrie-as.

transformatie	*functie*	*domein*	*bereik*	*V.A.*	*H.A.*
	$y = \frac{1}{x^2}$	⟨←, 0⟩ ∪ ⟨0, →⟩	⟨0, →⟩	$x = 0$	$y = 0$
vermenigv. met −2 t.o.v. *x*-as	↓				
(functie met −2 vermenigv.)	$y = -\frac{2}{x^2}$	⟨←, 0⟩ ∪ ⟨0, →⟩	⟨←, 0⟩	$x = 0$	$y = 0$
translatie (3, 0)	↓				
(x vervangen door x − 3)	$y = -\frac{2}{(x-3)^2}$	⟨←, 3⟩ ∪ ⟨3, →⟩	⟨←, 0⟩	$x = 3$	$y = 0$
vermenigv. met $\frac{1}{3}$ t.o.v. *y*-as	↓				
(x vervangen door $\frac{x}{\frac{1}{3}}$ (= 3x))	$y = -\frac{2}{(3x-3)^2}$	⟨←, 1⟩ ∪ ⟨1, →⟩	⟨←, 0⟩	$x = 1$	$y = 0$
translatie (0, −5)	↓				
(−5 bij de functie optellen)	$\mathbf{y = -\frac{2}{(3x-3)^2} - 5}$	**⟨←, 1⟩ ∪ ⟨1, →⟩**	**⟨←, −5⟩**	$\mathbf{x = 1}$	$\mathbf{y = -5}$

Bepalen hoe een grafiek van een functie uit een standaardgrafiek is ontstaan

In de vorige paragraaf kreeg je een standaardfunctie en enkele transformaties die op de standaard-grafiek werden uitgevoerd. Hiermee kon het functievoorschrift behorende bij de uiteindelijke grafiek bepaald worden. Andersom kan het ook: je krijgt een functie gegeven en er wordt gevraagd hoe de grafiek ervan uit een standaardgrafiek is ontstaan. De meest eenvoudige volgorde om aan te houden is: 1) vermenigvuldiging t.o.v. de x-as, 2) horizontale translatie, 3) vermenigvuldiging t.o.v. de y-as en 4) verticale translatie. (Je hebt niet altijd alle vier transformaties nodig.)

Voorbeeldopgaven

c) Hoe ontstaat de grafiek van $y = -(2x + 4)^4 - 7$ uit een standaardgrafiek? Geef ook domein, bereik en bijzondere punten/lijnen van de grafiek van $y = -(2x + 4)^4 - 7$.

Uitwerking 1: volgorde van transformaties zoals in de tekst hierboven. Je begint met de grafiek van de standaardfunctie $y = x^4$, die $x = 0$ als de symmetrie-as en (0, 0) als top heeft.

transformatie	*functie*	*domein*	*bereik*	*symm.-as*	*top*
	$y = x^4$	ℝ	[0, →⟩	$x = 0$	(0, 0)
vermenigv. met −1 t.o.v. *x*-as	↓				
(functie met −1 vermenigv.)	$y = -x^4$	ℝ	⟨←, 0]	$x = 0$	(0, 0)
translatie (−4, 0)	↓				
(x vervangen door x + 4)	$y = -(x + 4)^4$	ℝ	⟨←, 0]	$x = -4$	(−4, 0)
vermenigv. met $\frac{1}{2}$ t.o.v. *y*-as	↓				
(x vervangen door $\frac{x}{\frac{1}{2}}$ (= 2x))	$y = -(2x + 4)^4$	ℝ	⟨←, 0]	$x = -2$	(−2, 0)
translatie (0, −7)	↓				
(−7 bij de functie optellen)	$y = -(2x + 4)^4 - 7$	ℝ	⟨←, −7]	$x = -2$	(−2, −7)

Uitwerking 2: het is ook prima om de transformaties in een andere volgorde te doen. In deze uitwerking wordt de vermenigvuldiging t.o.v. de y-as als tweede stap gedaan en de horizontale translatie als derde stap. Let op dat in dat geval een andere horizontale translatie nodig is dan in uitwerking 1.

transformatie	*functie*	*domein*	*bereik*	*symm.-as*	*top*
	$y = x^4$	$\mathbb{R}$	$[0, \rightarrow\rangle$	$x = 0$	$(0, 0)$
vermenigv. met −1 t.o.v. *x*-as	$\downarrow$				
(functie met −1 vermenigv.)	$y = -x^4$	$\mathbb{R}$	$\langle\leftarrow, 0]$	$x = 0$	$(0, 0)$
vermenigv. met $\frac{1}{2}$ t.o.v. *y*-as	$\downarrow$				
(x vervangen door $\frac{x}{\frac{1}{2}}$ (= 2x))	$y = -(2x)^4$	$\mathbb{R}$	$\langle\leftarrow, 0]$	$x = 0$	$(0, 0)$
translatie (−2, 0)	$\downarrow$				
(x vervangen door x + 2)	$y = -(2(x + 2))^4$ $= -(2x + 4)^4$	$\mathbb{R}$	$\langle\leftarrow, 0]$	$x = -2$	$(-2, 0)$
translatie (0, −7)	$\downarrow$				
(−7 bij de functie optellen)	$y = -(2x + 4)^4 - 7$	$\mathbb{R}$	$\langle\leftarrow, -7]$	$x = -2$	$(-2, -7)$

d) Hoe ontstaat de grafiek van $y = 2\cdot\ln(-\frac{1}{3}x - 4)$ uit een standaardgrafiek? Geef ook domein, bereik en bijzondere punten/lijnen van de grafiek van $y = 2\cdot\ln(-\frac{1}{3}x - 4)$. Je kunt deze opgave overslaan als je nog geen logaritmes hebt gehad.

Uitwerking: ln betekent natuurlijke logaritme en moet gelezen worden als ${}^{e}\log$. De standaardfunctie $y = \ln(x)$ is dus van het type $y = {}^{g}\log(x)$. Deze standaardgrafiek heeft $x = 0$ als de verticale asymptoot.

transformatie	*functie*	*domein*	*bereik*	*V.A.*
	$y = \ln(x)$	$\langle 0, \rightarrow\rangle$	$\mathbb{R}$	$x = 0$
vermenigv. met 2 t.o.v. *x*-as	$\downarrow$			
(functie met 2 vermenigv.)	$y = 2\cdot\ln(x)$	$\langle 0, \rightarrow\rangle$	$\mathbb{R}$	$x = 0$
translatie (4, 0)	$\downarrow$			
(x vervangen door x − 4)	$y = 2\cdot\ln(x - 4)$	$\langle 4, \rightarrow\rangle$	$\mathbb{R}$	$x = 4$
vermenigv. met −3 t.o.v. *y*-as	$\downarrow$			
(x vervangen door $\frac{x}{-3}$ (= $-\frac{1}{3}x$))	$y = 2\cdot\ln(-\frac{1}{3}x - 4)$	$\langle\leftarrow, -12\rangle$	$\mathbb{R}$	$x = -12$