Verzamelingen, getallen en getallenverzamelingen

Verzamelingen spelen een grote rol in de wiskunde. In dit document worden enkele eigenschappen en notaties van verzamelingen behandeld. De nadruk ligt op getallenverzamelingen en het hoofddoel is dat je weet wat de belangrijke getallenverzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ zijn.

Wat is een verzameling?

De Duitse wiskundige Georg Cantor noemde een **verzameling** informeel "een veelheid aan elementen, die volgens een bepaalde definitie bij elkaar horen, en daardoor een geheel vormen".

Stel dat je een verzameling *M* definieert als ‘alle maanden van het jaar’. In die verzameling bevinden zich dus de maanden januari tot en met december. Elk van die maanden is een **element** van de verzameling, dus *M* bevat 12 elementen. We hebben *M* hierboven in woorden gedefinieerd, maar we kunnen ook de inhoud van *M* expliciet benoemen door de individuele elementen tussen accolades {} te plaatsen, door elkaar gescheiden van komma’s:

M = {januari, februari, maart, april, mei, juni, juli, augustus, september, oktober, november, december}

De maanden hadden ook in een andere volgorde mogen worden gegeven, want de elementen van een verzameling zijn **niet geordend**. Februari is dus niet het tweede element van *M*, maar gewoon een van de 12 elementen van *M*. Een element komt in een verzameling slechts **eenmaal** voor.

Met de symbolen $\in$ en $\notin$ kun je aangeven of iets wel of niet een element van de verzameling is. April is een element van *M*: april $\in M$. Zondag is geen element van *M*: zondag $\notin M$.

De **lege verzameling**, een verzameling met 0 elementen, bestaat ook. Deze wordt genoteerd als $\emptyset$ of soms als {}. Stel dat we verzameling *L* definiëren als ‘alle maanden van het jaar met meer dan 31 dagen’. Er zijn geen maanden die aan die definitie voldoen, dus $L = \emptyset$.

Wat is een getal?

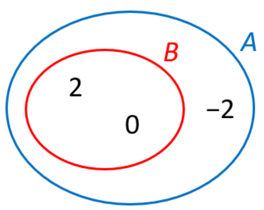
Een **getal** is een wiskundig object dat hoeveelheid aangeeft. Voorbeelden zijn 0, 1, −3, 126, ⅖ en π. Verwar getal niet met cijfer: 126 is een getal, waarvoor drie cijfers nodig zijn om het te noteren.

Getallenverzamelingen

We richten ons nu op getallenverzamelingen — verzamelingen die getallen als elementen hebben. In de volgende subparagrafen worden enkele relaties tussen verzamelingen besproken en geïllustreerd aan de hand van **Eulerdiagrammen**. In zo’n diagram is ten eerste te zien bij welke verzameling(en) een getal hoort. Ten tweede geeft de getekende relatieve positie van de verzamelingen duidelijke informatie over de relatie tussen de verzamelingen.

Deelverzamelingen

Stel, we hebben de volgende verzamelingen: $A = \{-2, 0, 2\}$ en $B = \{0, 2\}$.
B is een **deelverzameling** van *A* (notatie: $B \subset A$), want elk element van verzameling *B* is ook een element van verzameling *A*. Daarom is verzameling *B* in het Eulerdiagram geheel binnen verzameling *A* getekend.
We kunnen ook zeggen: verzameling *A* omvat verzameling *B* (A ⊃ B).
De verzameling $C = \{1, 2\}$ is géén deelverzameling van *A*, want $1 \notin A$.

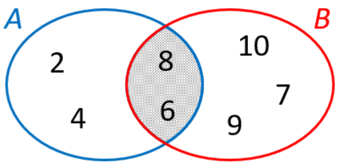


$B \subset A$

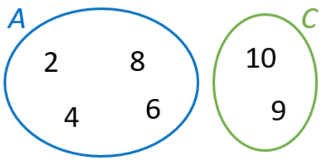
Van een verzameling met n elementen zijn 2^n deelverzamelingen te maken. Je kunt namelijk onafhankelijk voor elk element van de verzameling kiezen of je deze wel of niet een element van de deelverzameling laat zijn. Dit zijn bijvoorbeeld alle 8 (= 2^3) deelverzamelingen van A: ∅, {−2}, {0}, {2}, {−2, 0}, {0, 2}, {−2, 2} en {−2, 0, 2}.[1] Merk op dat zowel de lege verzameling als A zelf ook deelverzamelingen van A zijn.

Doorsnede van verzamelingen

De **doorsnede** van verzamelingen A en B, genoteerd als $A \cap B$ of als $B \cap A$, bestaat uit de elementen die zowel in A als in B voorkomen (de gemeenschappelijke elementen van A en B). Als voorbeeld nemen we $A = \{2, 4, 6, 8\}$ en $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. De getallen 6 en 8 zijn elementen van zowel A als B, dus $A \cap B = \{6, 8\}$ (grijs gearceerd).



$A \cap B = \{6, 8\}$

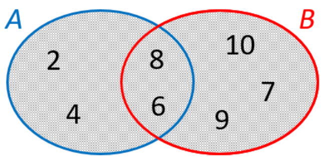


$A \cap C = \emptyset$

Het kan ook gebeuren dat twee verzamelingen geen gemeenschappelijke elementen hebben; hun doorsnede is de lege verzameling. Als $C = \{9, 10\}$, dan hebben A en C geen gemeenschappelijke elementen: $A \cap C = \emptyset$. Verzamelingen A en C zijn **disjunct**. In het Eulerdiagram is dat weergegeven door de verzamelingen zonder overlap te tekenen.

Vereniging van verzamelingen

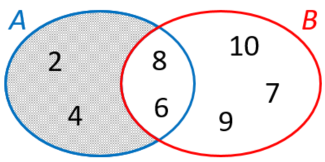
De **vereniging** van verzamelingen A en B, genoteerd als $A \cup B$ of als $B \cup A$, bestaat uit de elementen die in A of in B (of in beide) voorkomen. Weer uitgaande van $A = \{2, 4, 6, 8\}$ en $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, krijgen we $A \cup B = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$.



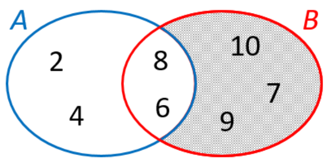
$A \cup B = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Verschil van verzamelingen

Het **verschil** van verzamelingen A en B, genoteerd als $A \setminus B$, bestaat uit de elementen die wél in A maar niet in B voorkomen. Weer uitgaande van $A = \{2, 4, 6, 8\}$ en $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, krijgen we dat $A \setminus B = \{2, 4\}$. Let op dat $B \setminus A$ niet dezelfde verzameling is als $A \setminus B$.



$A \setminus B = \{2, 4\}$



$B \setminus A = \{7, 9, 10\}$

Enkele belangrijke oneindige getallenverzamelingen

ℕ: de verzameling van natuurlijke getallen

Een **natuurlijk getal** is het resultaat van een telling van een eindig aantal voorwerpen. Als je het aantal koeien in een wei telt, kom je misschien uit op 35 koeien, of 0 koeien, of 1 koe. De natuurlijke getallen zijn dus 0, 1, 2, 3, enzovoort. Er zijn oneindig veel natuurlijke getallen.

De **verzameling van natuurlijke getallen**, gesymboliseerd met ℕ, bevat alle natuurlijke getallen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. In deze notatie suggereren de puntjes dat alle getallen die groter zijn dan 3 (en dan steeds met 1 verhoogd) ook elementen van ℕ zijn. Het is onmogelijk om alle elementen van ℕ specifiek te benoemen, omdat het een oneindige verzameling is.

---

[1] Om het overzichtelijk te houden, worden de getallen in een getallenverzameling vaak op volgorde van klein naar groot opgeschreven. Besef wel dat {0, 2, −2} precies dezelfde verzameling is als {−2, 0, 2}.

ℤ: de verzameling van gehele getallen

Een **geheel getal** kan zonder cijfers achter de komma worden geschreven. Evenals de natuurlijke getallen, horen ook de *negatieve gehele getallen* −1, −2, −3, enzovoort, bij de gehele getallen.

De **verzameling van gehele getallen**, gesymboliseerd met ℤ, bevat alle gehele getallen: ℤ = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...}. Omdat natuurlijke getallen ook gehele getallen zijn, is ℕ een deelverzameling van ℤ ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$).

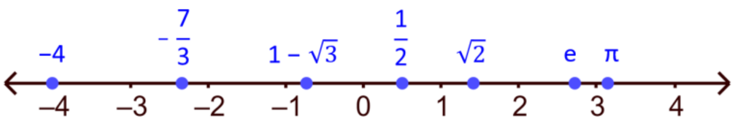
ℚ: de verzameling van rationale getallen

Een **rationaal getal** kan worden geschreven als een deling van twee gehele getallen, dus als de breuk $\frac{a}{b}$ (*a* gedeeld door *b*), waarbij *a* en *b* elementen van ℤ zijn en *b* ongelijk is aan 0. Deze breuk heet ook wel de **ratio** (verhouding) van *a* en *b*, wat de naamgeving van deze getallen verklaart. Enkele voorbeelden[2] van rationale getallen zijn $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{-15}, \frac{-17}{5}$ en $\frac{18}{-6}$. De eerste vier zijn *gebroken getallen*, omdat de uitkomst van de deling niet een geheel getal is. Het laatste voorbeeld levert het gehele getal −3 als resultaat — gehele getallen zijn dus ook rationale getallen.

De **verzameling van rationale getallen**, gesymboliseerd met ℚ, bevat alle rationale getallen.[3] Omdat gehele getallen ook rationale getallen zijn, is ℤ een deelverzameling van ℚ ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

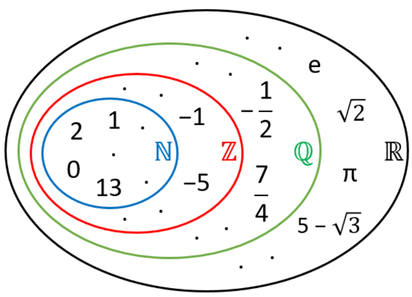
ℝ: de verzameling van reële getallen

Een **reëel getal** is een getal dat overeenkomt met een punt op de **getallenlijn** (zie hieronder). Alle rationale getallen zijn dus reële getallen. Ook getallen als $\sqrt{2}$, π en e hebben een plek op de getallenlijn en zijn daarom reële getallen. Zij zijn echter niet als rationaal getal te schrijven en heten daarom *irrationale getallen*. De overgrote meerderheid van de reële getallen zijn irrationale getallen.



De **verzameling van reële getallen**, gesymboliseerd met ℝ, bevat alle reële getallen. ℝ wordt soms ook het **continuüm** genoemd en wordt grafisch voorgesteld door de volledige getallenlijn. Omdat rationale getallen ook reële getallen zijn, is ℚ een deelverzameling van ℝ ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

Hieronder staan de vier belangrijke getallenverzamelingen in een Eulerdiagram weergegeven. Je ziet hier duidelijk dat $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dus als een getal bijvoorbeeld een element van ℤ is, dan is het ook een element van ℚ en van ℝ.



... is de verzameling van ... getallen	
ℕ	natuurlijke
ℤ	gehele
ℚ	rationale
ℝ	reële
ℤ \ ℕ	negatieve gehele
ℚ \ ℤ	gebroken
ℝ \ ℚ	irrationale

Getallenverzamelingen en enkele representatieve elementen

---

[2] Aanrader: vereenvoudig de breuk zover mogelijk en zet een eventueel resterend minteken voor de breuk neer. Op die manier zie je dat $\frac{3}{-12}, \frac{-3}{12}, \frac{1}{-4}$ en $\frac{-1}{4}$ allemaal hetzelfde getal zijn (meestal genoteerd als $-\frac{1}{4}$).

[3] Formeel zouden we kunnen schrijven: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z} \text{ en } b \neq 0\}$. Hier betekent | '*waarvoor geldt dat*'.